ETESI GÁBOR[1]

Az aritmetikai kontinuum szerkezete a modern fizika és pszichológia tükrében

1. A KONTINUUM RÖVID TÖRTÉNETE

„Bármely tárgy, ha erősen nézünk reá, az istenek elronthatatlan eónjai felé nyíló kapu lehet." írja *James Joyce* Ulysses c. regényében (Szentkuthy Miklós fordítása). A hagyomány szerint *szamoszi Pitagórász* egy kovácsműhelyben zajló munkát figyelve és az onnan kicsendülő különböző magasságú hangokat meghallva jutott hirtelen arra a fölismerésre, hogy a zenei harmóniák természetes számok arányaiként érthetők meg. Ezt a pitagoreus természetfilozófiai-vallási iskola hamar metafizikai szintre emelte és a természetes számokat, ill. ezek arányait, a racionális számokat a kozmosz titkos rendező elveivé tette. Két évezred távolságából is átérezzük e felismerés legmagasabb rendű szépségét és tisztaságát, a görögség legmagától értetődőbb hitét az elronthatatlan örök dolgok létezésében. A görög kultúra a szellemtörténet legszebb—mert a kozmosz és az ember mindmáig legteljesebb egyensúlyán nyugvó—korszaka.

A matematika legfontosabb struktúrája: a geometria, algebra, analízis egységes alapját adó *aritmetikai kontinuum* vagy másnéven *valós számok* fogalmának *Pitagórásszal* kezdődő 2600 éves fejlődéstörténete ettől a túl magasan elhelyezkedő—így a saját-ellentétébe-átfordulás (*enantiodrómia*) veszélyét is magában rejtő—esztétikai egyensúlyi helyzettől való gyorsuló távolodás története. Már a pitagoraszi iskola egyik tagja, *Hippaszosz* is észrevette, hogy a négyzet átlójának és egyik oldalának aránya (mely arányt manapság a $\sqrt{2}$ irracionális valós számmal azonosítunk) nem áll elő két természetes szám hányadosaként. A felismerés a pitagoreusokra olyan sokkolóan hatott, hogy egy történet szerint *Hippaszoszt*, a kozmikus rend megsértőjét, társai vízbe fojtották.[2] De az igazság természete nem csak az, hogy minden rendszer számára botrányként jelentkezik, hanem az is, hogy minduntalan kitudódik. Sőt, mivel a görög matematikusok erőssége volt a geometria, e zavaró arányok egyre csak szaporodtak: pl. a szabályos háromszög magasságának és oldalának aránya (amit ma a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ irracionális számnak nevezünk), vagy az szabályos ötszög bármelyik átlójának és oldalának aránya, a híres aranymetszés (az $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ irracionális szám) sem áll elő természetes számok hányadosaiként. A kialakult helyzet tehát tisztázást kívánt. Az egyik legnagyobb görög matematikus, *Eudoxosz* végezte ezt el; minden mai szempontból is kifogástalan elméletet dolgozott ki e „nem megengedett arányok" kezelésére. Elméletében ezeket „megengedett arányok", vagyis természetes számok hányadosainak *végtelen* seregével, összességével azonosította. Elsőként fogalmazta meg a doktrínát, mely mai fogalmainkkal szólva kimondja, hogy a valós számokat a racionálisokból kiindulva kell előállítani.

Viszont *Eudoxosz* elmélete, mivel végtelen objektumokkal operált, a görög lélekben sajátos feszültséget is keltett, melyet a végtelentől, az *apeirontól* való irtózat táplált. A távolságtartást a *Parmenidész* gondolatait tovább szövő eleai iskolából érkező (a hagyomány szerint *eleai Zénón* által megfogalmazott) nyugtalanító gondolati paradoxonok is indokolták. E jólismert paradoxonok szerint a tér (pl. közvetve *Eudoxosz* által is feltételezett) aktuális, tehát jelenidőben történő, végtelen sok részre való felosztása ellentmondásokhoz vezet, így nem megengedhető. Ugyanakkor a végtelen más, nem-aktuális, tehát nem-jelenidőbeli, hanem potenciális formái—mint pl. a számolás folytathatóságának,

[1]E-mail: etesi@math.bme.hu

[2]Szinte bizonyos, hogy ezt, a fentebbi kovácsműhelyes történettel együtt, utólag találták ki.

vagy tetszőlegesen sok térbeli test egymás mellé helyezhetőségének elgondolhatósága—nem tűnnek ellentmondásosnak. Végül a görög gondolkodás legnagyobb rendszerezője, *Arisztotelész* rögzíti, hogy melyek a végtelen megengedhető (*potenciális végtelen*, számolással kapcsolatos) és nem megengedhető (*aktuális végtelen*, felosztással kapcsolatos) megjelenési formái.[3] A térbeli dolgok végtelen felosztásának megtiltása azt eredményezi, hogy az arisztotelészi kontinuum-fogalom elemi, tehát semmi más, primitívebb koncepcióból nem származtatható fogalma a *kiterjedtség*. Az arisztotelészi szintetikus kontinuum-fogalom éles ellentétben áll modern, analitikus kontinuum-felfogásunkkal, ahol is a kontinuum nem elemi tulajdonsága a kiterjedtség, hanem éppen ellenkezőleg: *kiterjedtség nélküli pontok összességéből* áll. A modern kontinuum-fogalom a XIX. sz. végére alakult ki, tehát a modern fizika és pszicho-fiziológia megszületése előtt; az általuk hozott új ismeretek viszont az analitikus kontinuum-fogalmat egyre problematikusabbá teszik. Visszapillantva, *Arisztotelésznek* alapos oka volt óva inteni az aktuálisan végtelen ontologikus elfogadásától.

A jótanácsot a nyugati gondolkodás nem fogadta meg. Annak ellenére, hogy a kora-kereszténység *privatio boni* elvéhez igazodva a tartózkodás a végtelentől mint a „jó hiányának” egyik megnyilvánulásától még egy jó évezredig kitartott: a X. sz. utolsó éveiben *Gerbert d'Aurillac* francia szerzetest, korának legműveltebb tudósát és a későbbi *II. Szilveszter* pápát,[4] „Könyvecske a számok osztásáról” c. munkája alapján a *XVI. János* ellenpápa köré tömörült ellenségei többek közt azzal vádolják meg, hogy „képes tetszőlegesen nagy számok osztására is, következésképp eladta magát az ördögnek”. Mindeközben a VII. sz. derekán *Brahmagupta* indiai matematikus az indiai absztrakt fogalmi gondolkodás egyik csúcsteljesítményeként a metafizikai értelemben vett semmit számként kezdi kezelni: megszületik a *nulla szám* fogalma. Arab közvetítéssel a XIII-XIV. sz. körül Európába is megérkezik a nulla mint tiszta szám, aritmetikai konstrukció. A nulla megjelenése tehát eredetileg nem kerül kapcsolatba semmiféle geometriai kiterjedtséggel, viszont megnyitja az utat a térbeli kiterjedtség nélküli pont nullaként való számszerű felfogása felé. De ekkor még, vagyis a skolasztika idején a görögöket követve mindenki—pl. *Walter Chatton*, *Harclay-i Henrik*, *Richard Kilvington*, *Wodeham-i Ádám*, *Thomas Bradwardine*, *William Ockham*—az arisztotelészi szintetikus kontinuum-fogalom keretében az aritmetikai eredetű, kiterjedtség nélküli számok és a geometriai eredetű, kiterjedtséggel bíró szakaszok fogalmát egymástól élesen elkülönítve kezeli.

A XVI-XVII. sz-ban az arab eredetű algebra is fejlődésnek indul, megtalálják a harmadfokú (*G. Cardano*) és a negyedfokú (*L. Ferrari*) egyenlet megoldóképleteit, fölfedezik a komplex számokat. A korábbi geometriai „nem megengedett arányok”, csakúgy, mint a „megengedettek”, algebrai egyenletek megoldásaiként, vagyis számokként is előállnak (pl. $\sqrt{2}$ gyöke az $x^2-2=0$ egyenletnek, $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ pedig az $x^2-x-1=0$ megoldása). Egyre többen (*S. Stevin, J. Wallis*) az absztrakt geometriai—és ami ekkor még ugyanaz: a valódi fizikai—térbeli kiterjedtségeket mint hosszúságokat számokként kezdik tekinteni. Az aritmetika és a geometria legszisztematikusabb összeillesztését *René Descartes* végzi el, útjára indítva a koordináta-geometriai, majd később *algebrai geometriai* kutatásokat: elképzelése szerint algebrai egyenletek megoldásával a térben *elvben* „megjelölhetők” kiterjedtség nélküli pontok és egy ilyen pont helyzetét a térben valós számhármasokkal, koordinátákkal lehet egyértelműen megadni. De mi egy „valós szám”? Vagy ami valahogy ugyanaz a kérdés: mi egy „pont”? *Descartes* dualisztikus, a *res extensa* és a *res cogitans* tapasztalati szembeállításán alapuló gondolkodásában a kiterjedtség még elemi, tovább nem bontható fogalom, tehát a kérdés sem bír központi jelentőséggel. Őt

[3]Metafizika IX. könyv és Fizika III. könyv: A végtelennek két fajtája van: (1) az összeadás szerinti végtelen, amely nem meríthető ki részek egymáshoz adása útján és (2) a felosztás szerinti végtelen, amely *ad infinitum* folytatható. A szám az első, a tér a második, az idő pedig mindkét értelemben végtelen. *Arisztotelész* szerint az (1) értelemben van, a (2) értelemben nincs végtelen. A térbeli kiterjedés végtelen összeadhatósága szerint, potenciálisan; de nem végtelen föloszthatósága szerint, aktuálisan. Egy térbeli kiterjedés soha sem osztható föl aktuálisan végtelen számú részre.

[4]Ő küldte *Szent Istvánnak* a koronát.

követően viszont a kérdés—tehát hogy mi is egy valós szám?—megválaszolatlanságától függetlenül fokozatosan gyökeret ver és megszilárdul az elképzelés, miszerint eleddig a tér legfőbbnek vélt tulajdonsága: a kiterjedtség nem primitiv fogalom, hanem a tér annak aktuálisan végtelen felosztásával előálló, de kiterjedtség nélküli és nem megtapasztalható „pontok” összességéből áll. A fogalmi tisztázódás e kritikus pillanatánál fontos szerepet játszhattak *Wilhelm Leibniz* akkortájt kibontakozó nagy hatású metafizikai monád-elképzelései is, ill. általában a metafizikai gondolkodás fölerősödése. E monádszerű jellemzőkkel bíró fikciónak: a tér elemi építőkövének, az egymagában is létező *pontnak* egyetlen tulajdonsága, hogy valamiképpen „ugyanaz”, mint egy másik fikció: a *valós szám*. A tér analitikus felfogása tette lehetővé a differenciál- és integrálszámítás fölfedezését (*I. Newton, W. Leibniz*) mely a *Descartes*-féle koordináta- vagy kifejezőbben analitikus geometriával együtt szilárdnak tűnő matematikai alapot nyújt a *Newton* által megfogalmazott klasszikus mechanika kidolgozásához. Az új elmélet sikert sikerre halmoz; azidáig megragadhatatlanul távolinak és különbözőnek tartott égi és földi dolgok egységes, szabatos leírását teszi lehetővé. Az arisztotelészi figyelmeztetést feledve, a XVII-XVIII. sz-ban az európai gondolkodás ontológiai szemantikával bíró fogalmai közt tehát mintegy észrevétlenül, és ugyanakkor nagyon is ünnepelve, fölbukkan az aktuális végtelen. A harmincéves háborúban szétzilált és megfáradt európai lélek a barokk korban mintha mindenben a végtelen eszméje felé fordulva keresne lelki-szellemi megújulást:[5] európai kikötőkből hajók távoli, egzotikus földrészek felé indulnak; *William Herschel* erős távcsövével új bolygót fedez föl a Naprendszerben és közben szimfóniákat komponál; a barokk építészet, a festészet de leginkább a barokk zene, csakúgy mint a filozófia, a matematika és a fizika, mind a végtelenről szólnak. E mindenre kiterjedő szellemi újjászületés lendületét látva nem is csoda, hogy egy egész korszak feledkezett meg arról, hogy tisztázza a kérdést: végül is, mi egy valós szám?

A válasz megszületésének időpontját pontosan ismerjük: 1858. november 24-e, amikor is *Richard Dedekind* német matematikus, saját bevallása szerint több évnyi küzdelem után e napon tisztázza a valós számok összességének, az aritmetikai kontinuumnak a szerkezetét és mint írja, megadja „a folytonosság lényegének valódi definícióját”. Arra jut, hogy a kontinuum pontosan kétféle dologból áll: racionális számokból és a racionális számok közti „hézagokból”, ezek az irracionális számok. Ezzel a régi eudoxoszi elképzeléshez tér vissza, miszerint minden valós szám a racionálisokhoz való viszonyai alapján ragadható meg. Mind a racionális szám, mind a „hézag”, vagyis az irracionális szám fogalmát precizen formalizálja is az ún. *Dedekind-szelet* segítségével. Egy Dedekind-szelet a racionális számok bizonyos végtelen sok elemből álló valódi részhalmaza; innentől kezdve egy valós szám már „hivatalosan” is egy aktuálisan végtelen entitás. Segítségükkel *Carl Weierstraß* precizzé teszi *Augustin Cauchy* elképzeléseit és megszületik a határérték, a differenciál-hányados mai fogalma is. Többek közt *Bernhard Riemann* majd *Henri Lebesgue* az integrál fogalmát tisztázzák. A XIX. sz. második felében elkészül az aritmetikai kontinuum, vagyis a valós számok szigorúan jóldefiniált struktúrája és a matematikai analízis, a geometria biztos lábakon áll. És ezáltal a fizikai tér megértése is, hiszen a XIX. sz. idealisztikus filozófiai légkörében—habár a század második felétől egyre erősödik a kritikai pozitivista ellenszél is, l. pl. *Dühring, Nietzsche*—továbbra sem jelentett problémát, hogy metafizikai konstrukciókat magától értetődően ontológiai státusszal ruházzanak föl.

Georg Cantor német matematikus helyezi először kiváncsiságának nagyítólencséje alá, vagyis teszi kritikai vizsgálat tárgyává az új, szabatos kontinuum-fogalmat az 1870-80-as években. A racionális számok közti veszélytelennek tűnő „hézagok” azonban nem várt bonyodalmakat okoznak. Arra a

[5] A metafizikai gondolkodás fő jellemzője, hogy egy feltételezett, pozitiv etikai értékekkel felruházott, idealisztikus fogalmi univerzumból kiindulva igyekszik megérteni a világot. Érdekes megvizsgálni, hogy egy filozófus, ill. általában egy kor metafizikai gondolkodási hajlamára milyen hatással van az élettel és a világgal való általános megelégedettség meglévő vagy hiányzó érzése; azok a filozófusok, így pl. még *Descartes* is, akik „nagyjából és egészében elégedettek voltak azzal, amit az élettől kaptak, csak könnyedén érintkeztek idealista nézetekkel.” *(E. Dühring)*.

megdöbbentő következtetésre jut, hogy a racionális számokhoz képest a valós számok halmazának mérete, ún. számossága, a „hézagok" hozzávételével váratlanul megugrik: míg a racionális számok ún. megszámlálhatóan végtelen sokan vannak, a valós számok egy nem-megszámlálhatóan végtelen óriási sereget alkotnak, „sokkal többen vannak". Máig—már a XX-XXI. sz-ban járunk—nem tudjuk megválaszolni a kérdést, hogy mennyi is a kontinuum számossága, vagyis hány pontból áll (*kontinuum hipotézis, G. Cantor*); sőt ez a kérdés nem is válaszolható meg a mai matematika elfogadott ún. ZFC axióma-rendszerének keretein belül (*K. Gödel, P. Cohen*). Még általánosabban, tetszőleges elsőrendő logikán alapuló axióma-rendszerekben is mindig megfogalmazható olyan állítás a valós számokról, mely nem dönthető el e rendszeren belül (*Gödel–Chaitin nem-teljességi tétel*). *Luitzen Brouwer* holland matematikus hívja fel a figyelmet arra, hogy a valós számokkal kapcsolatos kijelentésekre nem érvényes a klasszikus kétértékű logika. E negatív észrevételek mind azzal függenek össze, hogy a valós számok hatalmas seregének egy tipikus eleme, vagyis egy generikus irracionális valós szám, tehát a valós számok zöme, semmiféle véges eljárással nem jellemezhető aktuálisan végtelen halmaz. A matematika egy másik problematikus, de manapság már elfogadott elve az ún. *kiválasztási axióma*. Ha ezt az axiómát az aritmetikai kontinuumra alkalmazzuk, akkor egy, a kontinuummal kapcsolatos másik anomáliára derül fény: a valós számok halmazának léteznek nem-Lebesgue-mérhető részhalmazai. Ez a probléma első hallásra a matematikus társadalom belső ügyének tűnik, de azt eredményezi, hogy *egy*, a háromdimenziós geometriai térben, vagyis a valós számhármasok halmazában elhelyezkedő, tömör golyót szét lehet vágni hat darab diszjunkt részre úgy, hogy e részek csupán térbeli mozgatásokkal *két* másik, eredetivel megegyező sugarú tömör golyóvá illeszthetők össze (*Banach–Tarski paradoxon*). Ha ez az eljárás kivitelezhető lenne a fizikai világban, akkor pl. egy tömör aranygolyó fraktálszerű szétvágásával majd részeinek összeillesztésével két aranygolyót állíthatnánk elő. Ezek a tisztán matematikai paradoxonok tehát fölvetik a kérdést, hogy az aritmetikai kontinuumot tekinthejük-e a fizikai tér helyes matematikai modelljének?

Ezzel el is érkezünk a XX. sz-ban robbanásszerűen megszületett modern fizika által fölvetett problémákhoz. Közismert, hogy a matematikai eredmények legnagyobb fogyasztója az elméleti fizika. Teszi ezt azért, mert a modern fizika otthonos, jól-belakott világunk alatt-mellett-fölött a valóság olyan eleddig teljesen ismeretlen területeit tárta föl néhány évtized alatt, ahová közvetlen tapasztalat híján már csak matematikai fogalmaink gyér fényénél nyerünk némi bepillantást. *Bertrand Russell* brit filozófus és matematikus hívja föl a figyelmet először arra, hogy a fizika legvégső ismert fogalmait tekintve matematikai jellegű, s nem azért, mert olyan sokat tudunk a fizikai világról, hanem azért, mert olyan keveset; csupán legáltalánosabb matematikai jellemzői azok, amiket még felismerünk. A XX-XXI. sz-ban így különösen fontossá válik annak tisztázása, hogy matematikai fogalmaink helyesek és erősek-e abban az értelemben, hogy rájuk támaszkodhassunk ezen a teljesen ismeretlen terepen. Visszatérve tárgyunkhoz, az is nyilvánvaló továbbá, hogy az aritmetikai kontinuum fogalma (és az azon alapuló modern geometria és matematikai analízis) a modern fizika előtt alakult ki, tehát ez a fogalom nem volt felkészítve a modern fizikai tapasztalat felől érkező támadásokra. A kérdés így teljesen jogos: a fizikai tér matematikai modellezésére használt aritmetikai kontinuum metafizikai gyökerű XIX. sz-i fogalma elég erős-e ahhoz, hogy kiállja a modern fizika próbatételeit?

Az elmúlt néhány évtized történései azt mutatják, hogy az elméleti fizika egymás után engedi szabadjára a valós számokban palackba zárt szellemekként szunnyadó aktuális végteleneket. Egyre több, fizikai szempontból preciz gondolatmenet vezet fizikailag nem értelmezhető végtelen nagy eredményekhez, ún. *divergenciákhoz*. Most csak röviden említjük meg ezeket: bizonyos „szerencsétlen" kezdőfeltételekből indított Naprendszer-modellekben a newtoni mechanika szerint egyes tömeg*pont*ként kezelt bolygók véges idő alatt végtelen nagy mozgási energiára szert téve kirepülnek a rendszerből; ha a klasszikus elektrodinamika és a newtoni mechanika szabályai szerint az elektronra mint elektromosan töltött tömeg*pont*ra hattatjuk a mindig is magával hordozott saját elektromágneses terét, akkor az elektron ebben az elektromágneses térben, vagyis saját magától, véges idő alatt közel fénysebességre gyorsul föl (*elfutó elektron*); ha ezt a naiv klasszikus elektront, tehát az „elektromosan töltött tömeg*pont*ot" a modern relativisztikus kvantum-elektrodinamika fizikai tapasztalatok diktálta elveit követve egy (mind fizikai, mind matematikai szempontból rendkívül bonyolult) ún. relativisztikus elektron-pozitron kvantummezővel helyettesítjük, akkor a végtelenek más alakban, de újra felbukkannak (*renormálás, divergens perturbációs sorok*). Efféle elszálló, divergens jelenségeket nem látunk magunk körül, tehát joggal tehetjük föl, hogy itt a fizikai elmélet matematikai szerkezete nem megfelelő. A relativisztikus kvantum-elektrodinamika a kvantummező-elmétek egy fontos példája; ezek az elméletek a fizikai tér és idő nagyon kis tartományaiban zajló elemi folyamatokat írják le. Az itt makacsul megjelenő divergenciák fölvetik a kérdést, hogy a fizikai tér a legkisebb távolságokon is modellezhető-e az aritmetikai kontinuummal? Tovább menve, a gravitáció modern elméletében, az általános relativitás-elméletben szinte minden kezdeti szituáció végtelen nagy gravitációs terű tartományok, ún. *téridő-szingularitások* kialakulásához vezet (*Penrose–Hawking szingularitási tételek*). Viszont ezek felbukkanását közvetlen környezetünkben nem várjuk, így nem tudjuk tapasztalat alapján kizárni létezésüket. Gondoljuk ezeket is a matematikai modellbe eltemetett végtelenek kiszabadulásának és vessük el őket? Ellentétben a korábbi divergenciákkal, végtelen nagy sűrűségű és gravitációs terű téridő-szingularitások megjelenése fizikailag elég hihető mert a gravitáció mindent csak vonzani képes (ellentétben az elektromossággal). Közvetett csillagászati tapasztalatok alapján e téridő-szingularitások bizonyos fajtái: a *fekete lyukak* mintha léteznének,[6] ill. az *ősrobbanás* is egy manapság már elfogadott kozmológiai paradigma alapja. A XX-XXI. sz-i elméleti fizika fontos elvi kérdése, hogy a kvantumelmélet és a gravitáció ettől élesen különböző einsteini elmélete egységes fogalmi és matematikai keretbe illeszthető-e. Ez lenne a *kvantumgravitáció* elmélete, melyről azt gondoljuk, hogy a fizikai világ legelemibb elképzelhető folyamatait írná le. Szinte semmit nem tudunk arról, hogy ennek az elméletnek hogyan kellene kinéznie, de abban mindenki egyetért, hogy benne a fizikai téridő kontinuális modelljét valamiféle egészen más, diszkrét struktúrára kell lecserélni.

Ezidáig az aritmetikai kontinuum és a *fizikai tér* evidensnek tűnő kapcsolatát jártuk körül, de most említsünk meg egy érdekes észrevételt a *fizikai idővel* kapcsolatban: a mai fizikából teljességgel eltűnt az idő a maga *idő-szerűségében*. Elemi tapasztalatunk, hogy az időnek *inhomogén hármas szerkezete* van: áll a múltból, melyre emlékezünk mert *tényekből* tevődik össze, áll egy pillanatszerű jelenből amit mint egyetlen *eseményt* éppen mindig megélünk, és áll a jövőből, melyet nem ismerünk mert *lehetőségek* alkotják. Úgy véljük, hogy ennek a struktúrának nem nagyon sok köze lehet az aritmetikai kontinuumhoz, mely teljesen *egyforma pontok homogén seregéből* áll. Ennek a nyilvánvalóságnak a dacára a modern fizika *Newtontól* kezdve a fizikai időt, a fizikai térhez teljesen hasonlóan, az aritmetikai kontinuummal modellezhetőnek tekinti. A fizikai tér egy háromdimenziós, míg a fizikai idő egydimenziós kontinuum. E gondolkodásmód betetőzése a relativitás-elmélet, melyben mindkettőt egy egységes négydimenziós kontinuummá gyúrjuk össze. Az időt teljes egészében geometrizáltuk: eltemettük az aritmetikai kontinuumba. *Oswald Spengler* egyik érdekes megjegyzése, hogy egy fogalom teljes racionális megértése mindig együtt jár a fogalom egyfajta geometrizálódásával, vagyis geometriai jellegű fogalommá alakulásával. Tehát három évszázad alatt (*Newtontól Einsteinig*) megértettük volna a fizikai időt? Először is meg kell jegyezni, hogy az idő teljes geometrizálása nem sikerült, mert a fizika leginkább időről szóló, legkülönösebb, s talán legmélyebb felismerése, a termodinamika *második főtétele* makacsul ellenáll minden geometrizálási kísérletnek.[7] Fentebb említettük *Brouwer* fi-

[6] Pl. valószínű, hogy Tejútrendszerünk középpontjában (kb. 27.000 fényévre a Sagittarius [Nyilas] csillagkép irányában) is lapul egy Napunknál $4,2 \times 10^6$-szor nehezebb szuperóriás fekete lyuk. Néhány éven belül ez a kérdés el fog dőlni.

[7] *Spengler* szerint ez nem meglepő, ugyanis a fizikai világ temporalitását kifejező második főtétel egy ebben a pillanatban még nem teljesen látható, de „halálos döfést" jelent a newton–maxwell–einsteini, tk. barokk végtelen és időtlen fizikára. „Úgy gondolom, a törvény, mely szerint az entrópia mindig növekszik—a termodinamika második főtétele—jelenti

gyelmeztetését, hogy az aritmetikai kontinuummal kapcsolatos kijelentések nem elégítik ki a klasszikus kétértékű logika (arisztotelészi) szabályait, ami annak következménye, hogy egy generikus valós szám egy semmilyen véges eljárással nem jellemezhető aktuálisan végtelen halmaz. Meglepő, hogy viszont e kijelentésekre érvényes logika megegyezik a *jövőbeli fizikai eseményekre* érvényes logikával. Minthogyha az aritmetikai kontinuum nem befejezett, hanem nyitott, időbeli konstrukció lenne: a racionális számok a múltbeliség, míg az irracionálisok a jövőbeliség jellemzőit hordoznák. Tehát, habár az időt eltemettük az aritmetikai kontinuumba, ez utóbbi struktúra idő-szerű tulajdonságokat mutat. *Nem megértettük az időt, hanem éppen ellenkezőleg: az aritmetikai kontinuumot sem értjük, mert idő-szerű.*

Az idővel kapcsolatos észrevételek végül elvezetnek bennünket a kontinuummal kapcsolatos küzdelmek másik hadszínterére: a modern pszichológiához, pszicho-fiziológiához. *Wolfgang Pauli* Nobel-díjas osztrák fizikus javasolja, hogy jól működő fizikai, matematikai fogalmaink jól-működésének, ill. tovább-fejlődésének megértéséhez meg kell vizsgálnunk e fogalmak pszichológiai eredetét is. Van-e kontinuum-fogalmunknak pszichológiai eredete? Ha igen, akkor a matematikában precizen formalizált és a fizikai tér modellezésére alkalmasnak gondolt aritmetikai kontinuum mennyiben tekinthető bizonyos (tudattalan) pszichés tartalmak, mechanizmusok projekciójának? *William James*, a XIX. sz. legjelentősebb amerikai filozófusa és pszichológusa fogalmazza meg először világosan azt, hogyan jelenik meg számunkra öntudattal bíró létezésünk: tudatosult érzékszervi tapasztalataink, valamint belső mentális tevékenységünk tudatosult eredményei, gondolataink-érzéseink, egyenként és egymás után *folytonos eseménysorként* peregnek a *szubjektív én* mint megszakítás nélküli tanú előtt. Ez a *tudat folyama (stream of consciousness)*; a cartesiánus színház, aminek nézői mi magunk vagyunk. Kurrens pszicho-fiziológiai kísérletek (*B. Libet*, stb.), filozófiai elképzelések (*D. Dennett*, stb.) azonban egyre inkább megkérdőjelezik ezt a folyamatosságot. A sok példa közül most csak egyet említünk. Jól ismert, hogy még akkor is, ha úgy véljük, hogy egy tárgyat erősen figyelünk, szemünk valójában tudattalanul, különböző célpontok között ugrálva, állandóan pásztázza a teljes látómezőt. Néhányszor 10 msec iránytartás után nagy sebességgel 1-2 msec alatt új célpontra ugrik át. Egy ilyen célpont-váltás olyan gyors, hogy ezalatt az idő alatt látórendszerünk inkább „lekapcsol”, mert nem tudná feldolgozni a beérkező információ-áradatot. A célpont-váltás alatt egyszerűen nem látunk. Megdöbbentő, hogy ez a nem-látás egy átlagos nap során összesen mintegy 40 percet tesz ki! Számtalan kísérlet létezik, mely demonstrálja, hogy ezen „vak” periódusok alatt bekövetkezett—akár igen nagyszabású—környezeti változásoknak egyáltalán nem vagyunk tudatában. Hasonló a helyzet más érzékszerveinkkel, sőt jó okunk van feltételezni, hogy belső mentális tevékenységünk tudatosult eredményeit, gondolatainkat-érzéseinket is, „sötét” időintervallumok választják el egymástól. Ha ez így van, honnan származik a tudat folytonosságának érzete? Onnan, hogy itt *megfigyelő és megfigyelt ugyanaz*. Ahhoz, hogy tudatosan megállapíthassuk: a t_0 időpillanat *előtt* még nem voltunk tudatosak, de t_0 *után* már igen—vagyis: tudatunk a t_0 pillanatban *kapcsolt be*—nos, ehhez a t_0 utáni valamely $t_0+\varepsilon$ pillanatban tudatosan meg kellene tudnunk állapítani, hogy már tudatosak vagyunk és a t_0-t megelőző valamely $t_0-\varepsilon$ pillanatban tudatosan meg kellene tudnunk állapítani, hogy még nem vagyunk tudatosak—ám ez utóbbi nyilván lehetetlen. A cartesiánus színházban nem fordulhat elő, hogy már ott ülünk a sötétben és várjuk, hogy kezdődjön az előadás. Ugyanez az okfejtés ad magyarázatot arra, hogy miért nem emlékszünk sohasem álmaink *kezdő* pillanatára, hanem épp ellenkezőleg: egy álom felidézése során mindig az a kínzó érzésünk, hogy az első világosan felidézett képet már valahogy egy nagyon hosszú—végtelen hosszú?—homályos, ám annál lényegesebb eseménysor előzte meg. Az álom kronológiája nem lineáris, hanem *logaritmikus*: az időben visszafelé pergetve egyre gyorsuló és sűrűsödő, egyre nehezebben követhető eseménysorból áll határozott felütés nélkül; míg előre menve egyre lassabb, áttekinthetőbb képek (ill. felidézhető párbeszédek, megvilágosító felismerések, összetett zenei

a legfőbb elvet a természet törvényei közül.” *(A. Eddington)* harmóniák, stb.) alkotják. Érdekes, hogy modern kozmológiai elméleteink szerint a táguló Univerzum bármely belső megfigyelője is hasonlóan írja le a tapasztalatait: tetszőleges pillanatban és helyről széttekintve mindig arra a következtetésre fog jutni, hogy éppen egy heves-gyors kezdő eseménysor részét képező rövid, intenzív korszak végén és egy azt követő sokkal hosszabb és nyugodtabb korszak elején áll.[8] Tehát tudatosságunk tartalmazhat megszakításokat anélkül, hogy ennek tudatában lehetnénk és így fő szubjektív jellemzője lehet a folytonosság annak ellenére, hogy objektíven nem az. El lehet gondolkodni azon, hogy az aritmetikai kontinuum matematikai fogalma csupán egy teljesen szubjektív belső kontinuitási tapasztalat kivetülése-e; és hogy a fizikai teret-időt miért is tekintjük ezzel modellezhetőnek.

Végül oda jutunk, hogy a matematika kikezdhetetlennek tűnő fogalma: az aritmetikai kontinuum, a folytonosság, kettős támadás kereszttüzébe kerül. Egyrészt a kontinuumot alkotó pont fogalma empirikusan nem indokolható, sőt a fizikai leírásban gondokat okozó metafizikai konstrukció, másrészt maga a pontokból álló kontinuum, ill. a folytonosság élménye a világban, egy tudattalan pszichológiai projekció jegyeit viseli magán. Úgy véljük, hogy ez a kétirányú kikezdhetőség valójában egy és ugyanaz: ami a filozófiában mindig is metafizikaként jelent meg, az a pszichológiában újabban (esetleg kollektív tudattalan, tehát objektív) pszichés tartalmak külvilágra történő tudattalan projekcióiként lepleződik le. A kikezdhetőség oka mindig fogalmaink antropomorf jellege, vagyis saját magunktól való eredete.[9]

Megtisztíthatóak-e matematikai fogalmaink a bennük rejtőzködő metafizikai előfeltevésektől, tudattalan pszichés projekcióktól? És ezáltal tehetők-e pl. a modern elméleti fizika roppant épületének erősebb tartópilléreivé? Lehet-e pl. egy természetes szám empirikusan megtapasztalható és így „megkonstruálható-e” a végtelen (esetleg burkolt) előfeltételezése nélkül? Szélsőségesnek tekintett, de ezekkel a kérdésekkel kapcsolatba hozható kultúrtörténeti, sőt orvosi esetek tanulmányozása felvetik egy jövőbeli fizikaibb matematika lehetőségét. Egy ilyen mélyebb és tágabb matematika fogalmi kereteiben tapogatózva remélhetőleg a klasszikus filozófia metafizikai univerzuma és e régi eszközökkel már megközelíthetetlen, bonyolult posztmodern (XX-XXI. sz-i) valóság-élményünk közti szakadék további mélyülése is elkerülhető. Erre itt egy valóság-modell vázlatával teszünk kísérletet.

2. Az aritmetikai kontinuummal kapcsolatos matematikai problémák

Lássunk neki egy szabatosabb tárgyalásnak. Elsőként konstruáljuk meg vizsgálódásunk tárgyát: az aritmetikai kontinuumot, vagy másnéven a valós számok $\mathbb{R}$ halmazát. A gyorsaság kedvért induljunk ki a *nem-negatív racionális számok* $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ halmazából, ellátva a szokásos rendezéssel, összeadással és szorzással. Ez a halmaz tehát az $\frac{m}{n}$ alakú hányadosok összességének (ahol $m,n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ nem-nulla természtes számok a szokásos rendezéssel, összeadással, szorzással, l. az 5. szakasz eleje) és a 0-val jelölt nulla számnak az uniója. Pontosabban, két ilyen $\frac{m'}{n'}$ és $\frac{m''}{n''}$ számot azonosnak te-

[8]Jelenleg azt tapasztaljuk, hogy a belátható Univerzum nemrég (csupán kb. háromszor annyi idővel ezelőtt, mint a Föld életkora) egy forró, sűrű plazmagolyó volt és éppen lehűlt annyira, hogy elkezdődhetett egy hosszú, nyugodt időszaka: a csillagok korszaka. Az eddig eltelt heves, de rövid korszakhoz képest a csillagok ideje összehasonlíthatatlanul tovább fog tartani. Napunk mindössze a második csillag-generáció tagja és néhány első generációs öreg csillag még most is világít.

[9]*Nietzschével* szólva gondolkodásunk *Emberi, nagyon is emberi*. De a fiatal *Wittgenstein* nyelvkritikáját is érdemes itt megemlíteni.

kintünk, ha $m'n'' = m''n'$ mint természetes számok. Ez lehetővé teszi, hogy egy racionális számra mindig olyan legegyszerűbb $\frac{m}{n}$ alakban gondoljunk, hogy m,n-nek az 1-nél nagyobb közös osztója nincsen. Speciálisan egy n természetes számot $\frac{n}{1}$ alakban írva mindig racionális számnak tekintünk, tehát $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$. A $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ halmazon létezik egy *rendezés*: $\frac{m}{n} \leqq \frac{k}{l}$ akkor és csak akkor, ha $ml \leqq nk$ és mindig $0 \leqq \frac{m}{n}$; továbbá egy *összeadás*: $\frac{m}{n} + \frac{k}{l} := \frac{ml+nk}{nl}$ és $0 + \frac{m}{n} := \frac{m}{n}$; valamint egy *szorzás*: $\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} := \frac{mk}{nl}$ és $0 \cdot \frac{m}{n} := 0$. Már a racionális számokra is igaz, hogy *bármely két racionális szám között mindig van egy harmadik.* Pl. $\frac{m}{n} \leqq \frac{k}{l}$ esetén a számtani közepük $\frac{1}{2}(\frac{m}{n} + \frac{k}{l}) = \frac{ml+nk}{2nl}$ teljesíti, hogy $\frac{m}{n} \leqq \frac{ml+nk}{2nl} \leqq \frac{k}{l}$. Ez az *örökké való feloszthatóság* a valós számokra is öröklődik, az ún. *teljességgel* kiegészülve.

Léteznek nem racionális számok, pl. $\sqrt{2}$ nem az: ha az lenne, akkor létezne két természetes szám, hogy $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ teljesülne és föltehetjük, hogy m-nek és n-nek az 1-en kívül nincs közös osztója. De ekkor $2n^2 = m^2$ vagyis m^2 páros szám, ami csak úgy lehet, hogy $m = 2k$ is páros. Ezt visszaírva, $2n^2 = 4k^2$, vagyis $n^2 = 2k^2$, tehát $n = 2l$ is páros. Viszont ekkor m,n-nek van egy 1-nél nagyobb közös osztója: 2, ami ellentmondás. Tehát $\sqrt{2}$ nem racionális, hogyan lehet mégis jellemezni a racionális számokon belül? Ismerve a $\sqrt{2} = 1,4142...$ végtelen tizedestört-előállítást, azt véges helyiértékeknél elvágva végtelen sok racionális számot kapunk, melyek egyike sem egyezik meg $\sqrt{2}$-vel, de mind teljesítik, hogy

$$\begin{cases} 1 & < & \sqrt{2} \\ 1,4 & < & \sqrt{2} \\ 1,41 & < & \sqrt{2} \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \end{cases}$$

és *Dedekind* észrevétele egyszerűen az, hogy a $\sqrt{2}$*-t egyértelműen jellemzi az összes olyan racionális szám, ami nála kisebb*. Végtelen sok ilyen racionális szám van és ezek nyilván a $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ egy speciális részhalmazát alkotják. Az összes ilyen tulajdonságú részhalmazt így jellemezhetjük:

Definíció. *Egy $S \subsetneqq \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ valódi nem üres részhalmazt* Dedekind-szelet*nek nevezünk, ha bármely $s \in S$ elemére igaz: minden olyan $r \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ elemre melyre $r \leqq s$ teljesül, fennáll az is, hogy $r \in S$.*

Speciálisan, ha egy $r \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ racionális számot azonosítunk az összes nála nem nagyobb racionális szám halmazával: $r \equiv R := \{q \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \mid q \leqq r\}$, akkor minden r racionális számot is tekinthetünk úgy, mint egy R Dedekind-szeletet.

Ezzel el is jutottunk a valós számok definíciójához:

Definíció. *A nem-negatív racionális számok összes Dedekind-szeleteinek $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ halmazát a $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$-ból örökölt rendezéssel, összeadással és szorzással a* nem-negatív valós számok halmazá*nak nevezzük.*

A konstrukció alapján világos, hogy $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \subsetneqq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ nem üres valódi részhalmaz és egy $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ számot racionális*nak nevezünk, ha $x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ és* irracionális*nak, ha $x \notin \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$.*

A konstrukció alapján könnyen megmutatható, hogy a racionális számok halmazán megadott rendezés, összeadás, szorzás egyértelműen kiterjednek erre a nagyobb halmazra, vagyis $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$-on is egyértelműen léteznek ezek a műveletek és megszorításuk a $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ részhalmazra a korábban definiált műveleteket adja vissza. Végül egy további egyszerű lépéssel a teljes valós számok $\mathbb{R}$ halmaza, annak $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ racionális számokból álló részhalmaza és rajtuk a rendezés és a műveletek is megkonstruálhatók.

Ezekkel a technikai részletekkel itt most nem foglalkozunk, hanem elfogadjuk.

A konstrukció fontos tulajdonsága, hogy az $\mathbb{R}$ halmaz bármely korlátos X részhalmazának létezik $\sup X \in \mathbb{R}$ *szuprémuma* (legkisebb felső korlátja) vagy-ill.-és $\inf X \in \mathbb{R}$ *infimuma* (legnagyobb alsó korlátja). Valóban, ha pl. egy fölülről korlátos $B \subset \mathbb{R}$ halmazra úgy tekintünk, mint saját elemeinek összességére, akkor mint Dedekind-szeletek uniója maga is Dedekind-szelet lesz, és az ehhez tartozó b valós szám lesz $\sup B$. Ha C alulról korlátos, akkor pedig $\inf C := -\sup(-C)$ lesz az infimuma. Ebből máris következik, hogy a természetes számok $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ részhalmaza nem lehet korlátos felülről. Mert ha az lenne, akkor létezne az $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ részhalmaznak egy $\sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ szuprémuma. Vagyis ekkor *minden* $n \in \mathbb{N}$ elemre $n \leqq \sup \mathbb{N}$ teljesülne, és $\sup \mathbb{N}$ a *legkisebb* ilyen tulajdonságú szám. De mivel ha $n \in \mathbb{N}$ akkor $n+1 \in \mathbb{N}$ is igaz, ezért $n+1 \leqq \sup \mathbb{N}$ is fenn kell álljon, vagyis minden n-re $n \leqq \sup \mathbb{N} - 1 < \sup \mathbb{N}$ is teljesülne, ami azt jelentené, hogy $\sup \mathbb{N}$ mégsem a legkisebb felső korlát, ami ellentmondás. Ebből adódik, hogy bármely $a < b$ esetén az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallum, bármilyen „kicsi" legyen is, mindig tartalmaz racionális és irracionális számot is. Valóban, csakis az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $0 \leqq a < b$. Mivel $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ nem korlátos részhalmaz, mindig létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy már $\frac{1}{b-a} < N$. Ekkor nyilván az $\{\frac{m}{N} \mid m = 0,1,2,...\}$ racionális számok közül legalább egy bele fog esni $[a,b]$-be. Továbbá, mivel pl. $\sqrt{2}$ irracionális, az $\left\{\sqrt{2} \pm \frac{m}{N} \mid m = 0,1,2,\dots\right\}$ alakú számok is mind azok és ezek közül is valamelyik bele fog esni $[a,b]$-be. *Tehát a valós számok halmaza olyan szerkezetű, hogy tetszőlegesen kicsi rész-intervalluma is tartalmaz racionális számokat és köztük lévő „hézagokat", irracionális számokat, ráadásul mindkettőből végtelen sokat.*

A szuprémum, infimum létezésének másik fontos következménye, hogy ha $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ egy monoton növekedő, fölülről korlátos sorozat $\mathbb{R}$-ben, akkor egyértelműen létezik a $\lim_n a_n \in \mathbb{R}$ határértéke és ez a szám éppen $a := \sup_n \{a_n\}$. Valóban, mivel a egy felső korlát, akkor egyrészt tetszőlegesen kicsi $0 < \varepsilon$ pozitív valós szám esetén $a < a + \varepsilon$ is felső korlát így $a_n \leqq a + \varepsilon$; másrészt, mivel a a *legkisebb* felső korlát $a - \varepsilon < a$ már nem lehet az, ezért a sorozat monoton növekedését is figyelembe véve létezik egy $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ küszöb-index úgy, hogy már $a - \varepsilon \leqq a_n$ minden $n \geqq N_\varepsilon$ számra. Vagyis minden ε-ra $|a_n - a| \leqq \varepsilon$, ha $n \geqq N_\varepsilon$ ami *per definitionem* azt jelenti, hogy $\lim_n a_n = a$. Ez lehetővé teszi, hogy a valós számok elemeit egyértelműen végtelen tizedestört alakban adjuk meg. Pl. a $[0,1] \subset \mathbb{R}$ részhalmaz esetében ez ekképpen történik. Ha $a_i \in \{0,1,...,9\}$ „tizedesjegyek" kollekciója, akkor a

$$b_n := \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\ , \ n = 0,1,2,...$$

számok egy monoton növekedő felülről korlátos $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat tagjai, valamilyen egyértelmű $x \in [0,1]$ határértékkel. Fordítva, könnyű belátni, hogy bármely $x \in [0,1]$ valós számhoz egyértelműen található egy fentebbi $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, aminek határértéke nem más, mint x. Ezt a tényt röviden úgy jelöljük, hogy

$$x = 0,a_1a_2a_3...a_n... \tag{1}$$

és az $x \in [0,1]$ *tizedestört-előállításának* nevezzük.[10] Pl. $\sqrt{2} - 1 = 0,4142...$ egy példa ilyen kifejtésre.

Elérkeztünk az eddigiek másik fontos következményéhez, *Cantor* megdöbbentő fölismeréséhez: a valós számok halmazának számossága nagyobb, mint a természetes számoké. Mit jelent ez? Azt, hogy a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának elemei és a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazának elemei *nem* feletethetők meg kölcsönösen egyértelműen egymásnak; nem állíthatók párba, a valós számok nem indexelhetők, nem jelölhetők meg a természetes számokkal, mert ez utóbbiak kevesebben vannak. Ennek az állításnak

[10] Fontos megjegyezni, hogy most az $x = 1$ valós szám $0,9999\ldots$ csupa 9-esből álló végtelen tizedestört-alakban áll elő, hiszen $0,9999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots = 9 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$ a mértani sor összegképlete alapján.

a bizonyítása a *Cantor* által felfedezett *átlós eljáráson* alapszik, mely a matematika legegyszerűbb és legzavarbaejtőbb eljárása. Mi most csakis az egyszerűség kedvéért azt fogjuk belátni, hogy már a $[0,1] \subset \mathbb{R}$ intervallum is több valós számot tartalmaz, mint ahány természetes szám van. Tegyük föl tehát, hogy a $[0,1]$ intervallum x elemei és az $\mathbb{N}$ természetes számok halmazának n elemei valahogyan kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak, vagyis párokba rendezhetők. Mivel egy $x \in [0,1]$ valós számnak létezik egyértelmű (1) tizedestört-előállítása, *feltevésünk* azt eredményezi, hogy ugyancsak léteznie kell egy végtelen táblázatnak:

$\mathbb{N}$ elemei	$[0,1] \subset \mathbb{R}$ elemei
1	$x_1 = 0,a_1a_2\ldots$
2	$x_2 = 0,b_1b_2\ldots$
$\ldots$	$\ldots$
n	$x_n = 0,r_1r_2\ldots$
$\ldots$	$\ldots$

mely tehát azt jelenti, hogy az $x_1 = 0,a_1a_2\ldots$ valós számot megjelöltük az 1 természetes számmal, az $x_2 = 0,b_1b_2\ldots$-t a 2-vel, stb. és *minden* $y \in [0,1]$ valós szám valahol szerepel ebben a végtelen felsorolásban. De ez lehetetlen. Mert tekintsük pl. az $y := 0,a'_1b'_2\ldots r'_n\ldots \in [0,1]$ számot, amelynek k-adik p'_k tizedesjegyét a fentebbi táblázat k-adik $x_k = 0,p_1p_2\ldots p_k\ldots$ száma k-adik p_k tizedesjegyének megváltoztatásával adjuk meg:

$$p'_k := \begin{cases} p_k + 1 & \text{ha } 0 \leqq p_k \leqq 8 \\ 8 & \text{ha } p_k = 9\ . \end{cases}$$

Ez a szám biztosan nem szerepel a táblázatban, hiszen a tizedestört-előállítás egyértelmű és y első számjegye különbözik x_1-étől, tehát $y \neq x_1$, hasonlóan, y második számjegye különbözik x_2-étől, tehát $y \neq x_2$, s.í.t. Így $y \in [0,1]$ biztosan nincs a fentebbi listán: mert ilyen lista nem létezik. *A* $[0,1] \subset \mathbb{R}$ *és ennélfogva a valós számok* $\mathbb{R}$ *halmazának elemszáma, számossága, szigorúan nagyobb, mint a természetes számok* $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ *halmazáé.* A valós számokat nem tudjuk úgy felsorolni, mint a természetes számokat; azt mondjuk: a természetes számok *megszámlálhatóan végtelen* sokan vannak, míg a valós számok *nem-megszámlálhatóan végtelen* sokan. Egészen biztosan nem túlzás azt állítani, hogy ez az egész matematika legfurcsább eredménye. Máig sem tudjuk, hány elemből áll az $\mathbb{R}$ halmaz (*kontinuum-hipotézis, G. Cantor*), sőt: a mai matematika formális keretein belül ez a kérdés nem is válaszolható meg (*K. Gödel, P. Cohen*), l. alább.

Két intuíció-ellenes, ám annál fontosabb eredményt bizonyítottunk az aritmetikai kontinuumról. Mivel mindkét bizonyításban kulcsszerepet játszott a szuprémum, infimum létezése, ezért az aritmetikai kontinuum e legfontosabb tulajdonságát külön is kiemeljük:

Teljességi axióma. *A valós számok* $\mathbb{R}$ *halmazában bármely felülről (alulról) korlátos részhalmaznak létezik szuprémuma (infimuma).*

A XX-XXI. sz-i matematika egységes formai kerete az ún. *ZFC axióma-rendszer*. Ez egyrészt tartalmazza az *Ernst Zermelo* és *Abraham Fraenkel* által kidolgozott, halmazelméleti konstrukciók valamely elsőrendű logikát használó formális nyelven megfogalmazott axiomatizálását (ZF), másrészt a *kiválasztási axiómát* (C).[11] Tehát a ZFC formális nyelvének „szavai” az összes lehetséges halmazok és a velük végezhető műveletek, „nyelvtana” pedig *elsőrendű logikán* alapul; ez utóbbi azt jelenti, hogy a ZFC nyelvében megfogalmazható mondatok csakis e nyelv *szavai* (és nem pl. e szavakkal leírható

[11] Angolul *axiom of choice*; kimondja, hogy tetszőlegesen sok, nem-üres halmaz Descartes-szorzata nem üres.

további *tulajdonságok*, stb.) fölötti kvantifikálásokon alapulnak. Nincs mód itt arra, hogy belemélyedjünk, de föl kell hívnunk a figyelmet: a ZFC nyelve meglehetősen transzcendens, mert szókészlete az *összes lehetséges* halmazokból áll; emiatt is a megszorító *elsőrendű logika* használata és az ahhoz való ragaszkodás egy óvintézkedés, hogy biztosan ne kerüljenek be ellentmondások a ZFC nyelvébe. Végeredményben viszont az elsőrendű logikán alapuló nem-triviális axióma-rendszerek „gyengék": mindig konstruálható bennük olyan állítás, mely igaz, de a rendszeren belül nem bizonyítható (*Gödel nem-teljességi tétele*).[12] A ZFC tehát egy szigorú formális keret, melyet használhatunk arra, hogy (legalábbis elvben) matematikai konstrukcióinkat e nyelven világosan leírjuk és a lehető legnagyobb éberséggel megvizsgáljuk: nem tartalmaznak-e olyan logikai ellentmondásokat, melyeket a XX. sz. elején *Russell* és mások a XIX. sz-i matematika gyökereinél föltártak. Egy adott matematikai terület ellenőrzésekor a lehető legbiztonságosabban járunk el: a ZFC teljes transzcendens szókészletének a feltétlenül szükséges legkisebb hányadát használjuk csak (elsőrendű logikát használó speciális rész-nyelvek).

Mivel azt sejtjük, hogy a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának előállításakor süppedékeny talajon járunk, segíthet, hogyha az eddig használt *természetes nyelv* helyett a ZFC formális, szigorú, preciz nyelvét használva építjük föl az $\mathbb{R}$ halmazt, íly módon nyugtatva meg magunkat afelől, hogy az $\mathbb{R}$ konstrukciója sehol sem ellentmondásos. Az első különös észrevétel az, hogy a fentebbi *teljességi axióma*, mely a kontinuum leglényegét foglalja össze, *nem jól formalizálható a ZFC-ben*: csakis a ZFC teljes (transzcendens) szókészletét használva fogalmazható meg elsőrendűen, a rendezett algebrai testek (amely struktúra egyik képviselője az $\mathbb{R}$ halmaz is) sokkal biztonságosabb és ide vonatkozó rész-nyelvén nincs elsőrendű logikán alapuló megfogalmazása. Ezzel függ össze a második különös észrevétel, hogy az algebrai testek rész-nyelvén belül a „valós számok" igen sok, egymással nem izomorf modellje építhető föl, de e struktúrák legtöbbje nem igazán rendelkezik a kontinuumtól intuitívan elvárt tulajdonságokkal. Hanem ezek közül pontosan egy fog csak megegyezni a fentebbi $\mathbb{R}$ halmazzal: mégpedig az, amelyik kielégíti a nem jól formalizálható extra követelményt, a teljességi axiómát. Másként fogalmazva: *a XX-XXI. sz-i matematika formális és logikai alapját adó ZFC axióma-rendszer nem elég erős a valós számok tanulmányozásához*! A ZFC-t nem használhatjuk arra, hogy megbizonyosodjunk: az aritmetikai kontinuum szerkezete nem ellentmondásos.

Hogyha most már akkor kénytelenek vagyunk elfogadni, hogy az $\mathbb{R}$ számossága nagyobb, mint az $\mathbb{N}$ halmazé, meg kell kérdezzük: hogyan néznek ki az $\mathbb{R}$ zömét, a „szürke hátteret" adó tipikus y elemek, a „hézagok"? Megint csak meglepő, de erre a kérdésre sem tudunk válaszolni, hanem csak azt tudjuk megmondani, hogyan *nem* néz ki egy ilyen elem.

(i) Nyilván egy tipikus valós szám *nem* természetes szám: $y \notin \mathbb{N}$. Meggondolható, hogy a racionális és a természetes számok számossága megegyezik, vagyis racionálisokból is kevés van, tehát $y \notin \mathbb{Q}$;

(ii) Már tudjuk, hogy $\sqrt{2}$ irracionális, mennyire tipikus szám a $\sqrt{2}$? Erre a számra könnyű „rátalálni $\mathbb{R}$-ben", mert egy egészszám-együtthatós polinom, pl. az $x^2-2=0$ (egyik) megoldásaként előáll. Jelölje $\mathbb{A}$ az $\mathbb{R}$ azon x elemeinek halmazát, melyek előállnak egy $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=0$ egészszám-együtthatós (tehát $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ egészszámok) polinomiális egyenlet megoldásaiként. Az $\mathbb{A}$ elemeit *algebrai számoknak* nevezzük. Nyilván $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{A}$ és most már nagyon sok irracionális algebrai számot tudunk gyártani: pl. az $x^2-x-1=0$ egyik megoldásaként kapjuk az $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ aranymetszési számot vagy az $x^{12}-2=0$ egyik megoldása a $\sqrt[12]{2}$ mely a hangszerek *Werkmeister*-féle temperált hangolásában játszik szerepet, stb. Sajnos az derül ki, hogy látszólagos bősége ellenére az $\mathbb{A}$ számossága is megegyezik a természetes számokéval, tehát $y \notin \mathbb{A}$;

[12] A *Gödel*-tétel is az *átlós eljárással* bizonyítható.

(iii) Nem kis munkával belátható, hogy a kör kerületének és átmérőjének hányadosa, a $\pi = 3,1415\ldots$ vagy az *Euler*-féle $\mathrm{e} = 2,7182\ldots$ *nem* algebrai számok. Az ilyenféle számokat *transzcendenseknek* nevezzük. Tipikus elemei-e $\mathbb{R}$-nek ezek a számok? Megmutatható, hogy ezek a számok kifejthetők pl.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \quad , \quad \mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

alakban. *Alan Turing* brit matematikus javasolta, hogy ezeket a formulákat fogjuk fel a megfelelő számok *előállító algoritmusaiként*. Ez azt jelenti, hogy pl. az $\mathrm{e} \in \mathbb{R}$ számot egy rövid utasítással: "kezdd el összeadni a természetes számok faktoriálisainak reciprokait!" teljesen megadtuk úgy, hogy számjegyeit még egy *számítógép* is tetszőlegesen hosszan fel tudja sorolni. Jelölje $\mathbb{T}$ az $\mathbb{R}$ azon x elemeinek halmazát, melyekhez létezik egy-egy T_x véges utasítás-sor, *algoritmus*, melynek végrehajtásával x tetszőleges pontossággal előállítható pl. úgy, hogy minden n bemenetre a T_x kimenete, $T_x(n)$, egy n elemből álló számsor, mely nem más, mint x első n tizedesjegye. A $\mathbb{T}$ elemeit *kiszámítható számoknak* nevezzük. Nyilván $\mathbb{A} \subsetneqq \mathbb{T}$ és habár a π, e transzcendensek, pl. a fentebbi formulákkal még kiszámíthatóak. Most már aztán tényleg azt gondoljuk, hogy $\mathbb{R}$ elemeinek zöme $\mathbb{T}$-beli. De nem. Belátható (l. alább!), hogy a véges hosszú algoritmusok $\{T_x\}$ összességéből álló $\mathbb{T}$ halmaz is ugyanakkora számosságú, mint $\mathbb{N}$, tehát kiszámítható számokból is nagyon kevés van. Fáradtan hátradőlve vesszük tudomásul, hogy továbbra is, ha y egy tipikus valós szám, akkor $y \notin \mathbb{T}$.

A valós számok zöme nem-kiszámítható szám, mert a kiszámítható számok is még túl kevesen vannak. El lehet-e egyáltalán egy nem-kiszámítható számot gondolni? A feladat nehéz, mert egy olyan számot keresünk, melynek ugyan van tizdestört-előállítása, de azt biztosan nem ismerhetjük. Egy példa a *Gregory Chaitin* argentín-amerikai matematikus által fölfedezett $\Omega \in [0,1]$ szám, melynek konstrukciója *Turing* híres eredményén alapul: nem létezik algoritmikus eljárás arra, hogy eldöntsük bármely algoritmusról, hogy bármely bemenő adatsorra véges sok lépésben lefut-e, vagy sem (*megállási probléma*). Ennek a bizonyításnak az alapja ismét a veszélyes trükk: az *átlós eljárás*.

Ha T egy *algoritmus*, vagyis véges utasítás-sorozat, akkor T leírható, elkódolható egy véges hosszúságú jelsorozattal valamilyen formális nyelven. A lehetséges kódolások, vagyis nyelvek, között matematikai szempontból a legtermészetesebb az, amikor T-t egy $n \in \mathbb{N}$ természetes számmal kódolunk el, amit úgy fogunk írni, hogy T_n. Fordítva, ezen a matematikai nyelven minden $m \in \mathbb{N}$ felfogható, mint egy (esetleg értelmetlen, ellentmondásos) T_m algoritmus. Ezzel majdnem precizen beláttuk, hogy legfeljebb annyi algoritmus létezik, ahány természetes szám, vagyis megszámlálhatóan végtelen. Ebből az is adódik, hogy az $\mathbb{R}$ összes eddigi $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{A} \subsetneqq \mathbb{T}$ részhalmaza tényleg csak megszámlálhatóan végtelen. A fentebbi matematikai nyelvet arra is használhatjuk, hogy *bemenő* és *kimenő adatokat* kódoljunk el vele. Tehát $n \in \mathbb{N}$ most egy bemenet, amiből az m-edik T_m algoritmus, *ha az n bemenetre alkalmazva nem értelmetlen* (vagyis a T_m utasítás-sor n-re alkalmazva nem tartalmaz logikai ellentmondásokat, vagy nem kerül végtelen ciklusba, stb.), egy $T_m(n) \in \mathbb{N}$ kimenetet csinál. De lehetséges az is, hogy T_m *az n-re alkalmazva értelmetlen*. Egy rögzített m-re és n-re tekintsük az alábbi leképezést:

$$t_m(n) := \begin{cases} 1 & \text{ha } T_m \text{ az } n\text{-re lefut (és véges sok lépés után kiadja a } T_m(n) \text{ végeredményt)} \\ 0 & \text{ha } T_m \text{ az } n\text{-re nem fut le (mert nem értelmes, vagy végtelen ciklusba kerül, stb.)} \end{cases} .$$

Ekkor tehát jólértelmezett, így biztosan létezik az alábbi, valahogyan 0-kal és 1-ekkel kitöltött végtelen méretű táblázat:

	t_1	t_2	$\dots$	t_m	$\dots$
1	0	0	$\dots$	1	$\dots$
2	0	1	$\dots$	0	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	1	1	$\dots$	1	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

(a 0-k, 1-ek helyzete most csak illusztráció). Tehát: a táblázat *valahogyan* egyértelműen ki van töltve. Viszont fontos kérdés, hogy a táblázat *algoritmikusan* is kitölthető-e, vagyis létezik-e olyan U univerzális algoritmus, amely azt tudja, hogy

$$U(m,n) := \begin{cases} 1 & \text{ha } t_m(n) = 1 \text{ (vagyis } T_m \text{ az } n\text{-re lefut)} \\ 0 & \text{ha } t_m(n) = 0 \text{ (vagyis } T_m \text{ az } n\text{-re nem fut le)} \end{cases} .$$

Ha létezik ilyen U, akkor létezik az átló mentén értelmezett V algoritmus is, hogy $V(n) = 1 - U(n,n)$ vagyis

$$V(n) := \begin{cases} 1 & \text{ha } U(n,n) = 0 \\ 0 & \text{ha } U(n,n) = 1 \end{cases} .$$

Mivel a fentebbi táblázat tartalmazza az *összes* algoritmust, akkor ez a V is valamely T_j algoritmusnak megfelelő t_j oszlopként ott kell szerepeljen a táblázatban. De ez lehetetlen, mert V biztos különbözik T_1-től, hiszen más kimenetet ad az $n = 1$ bemenetre, V biztos különbözik T_2-től, hiszen más kimenetet ad az $n = 2$ bementre, s.í.t. Tehát nem létezik az U univerzális algoritmus.

Az $\Omega \in [0,1]$ valós számot egyszerűen a fentebbi egyértelműn kitöltött, de algoritmikusan nem kitölthető táblázat elemeit használva adjuk meg. Egészen pontosan a táblázaton cikk-cakkban végigmegyünk és elemeit számjegyeknek használva egy végtelen tizedestörtet állítunk elő:

$$\Omega := 0,\underbrace{t_1(1)}_{m+n=2}\underbrace{t_2(1)t_1(2)}_{m+n=3}\dots\underbrace{t_{k-1}(1)t_{k-2}(2)\dots t_m(n)\dots t_1(k-1)}_{m+n=k}\dots$$

(ennek a tizedestörtnek a számjegyei csak 0-kat és 1-eket tartalmaznak). Tehát $\Omega \notin \mathbb{T}$ és most először modhatjuk el, hogy előttünk áll a valós számok egy „tipikus képviselője”. De persze semmit sem tudunk róla mondani, még a számjegyeit sem tudjuk sehogy sem fölsorolni és a valós számok zöme ilyen. Most már további vad számokat is gyárthatunk, pl. $\Omega^2 + 1$ vagy $\sin\Omega$, stb. Nem-kiszámítható számok megjelenésével a fizikában is számolni kell (*Geroch–Hartle*).

Láttuk, hogy minden valós szám egy végtelen tizedestört. Van olyan, ami igen egyszerű, pl. $\frac{2}{3} = 0,6666\dots$ vagy $\frac{1}{4} = 0,2499\dots$ és általában könnyű megmutatni, hogy egy racionális számhoz mindig egy (esetleg véges hosszú bevezetőtől eltekintve) véges hosszú periódusokból álló *végtelen periodikus tizedestört*-előállítás tartozik. Így a megadásához elegendő leírni a véges sok számjegyből álló periódust és utána azt mondani, hogy ez ismétlődik. Így a racionális számok ebben az értelemben is tényleg véges, befejezett számok (vagyis mind $\mathbb{T}$ elemei). Az irracionális $\sqrt{2} = 1,4142\dots$, $\mathrm{e} = 2,7182\dots$ ill. a $\pi = 3,1415\dots$ *végtelen nem-periodikus tizedestörtek*, ezért hirtelen arra gondolunk, hogy e számokat nem tudjuk végesen leírni. De pl. létezik a

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

végtelen *lánctört-kifejtés*, vagy a már fentebb mutatott kifejtések e-re és π-re és az ezen kifejtések lépéseit megadó véges utasítás-sorok—vagyis a megfelelő T_x algoritmusok—véges sok karakterrel leírhatók. Egy ilyen T_x algoritmus tehát ugyan nem adja meg az x számot, de segítségével a szám tetszőleges pontossággal reprodukálható pl. úgy, hogy az n bemenetre $T_x(n)$ megadja az x első n tizedesjegyét (vagyis $\sqrt{2}, \mathrm{e}, \pi \in \mathbb{T}$, mind kiszámíthatók). Ezek a számok ebben a kicsit általánosabb értelemben tehát szintén végesek. Viszont az Ω ilyen értelemben sem véges, mert számjegyeit semmiféle algoritmus nem tudja fölsorolni (vagyis $\Omega \notin \mathbb{T}$) és a valós számok zöme ilyen.

Az eddigiek jól motiválják az *Andrej Ny. Kolmogorov* orosz matematikus által bevezetett fogalmat, egy valós szám *algoritmikus sűríthetőségét*. Legyen $x \in \mathbb{R}$ egy valós szám és jelöljük X-szel mindazon T_x algoritmusok összességét, melyek előállítják x-et pl. a fentebbi értelemben. Lehetséges, hogy ez a halmaz üres, mint pl. az Ω vagy minden nem-$\mathbb{T}$-beli szám esetében, de mindig legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok ilyen algoritmus létezhet x-re. A mi természetes kódolásunkban egy algoritmust egy természetes szám ad meg, s ennek a számnak a nagyságát tekinthetjük az algoritmus $|T_x|$ hosszának is; tehát mindig $|T_x| = n$ valamilyen $n \in \mathbb{N}$-re (és ekkor $T_x = T_n$ pontosan az n-edik algoritmus a fentebbi, összes algoritmust fölsoroló táblázatban). Egy x valós szám akkor *algoritmikusan sűríthető*, ha létezik T_x algoritmus, mely őt előállítja és a legrövidebb hosszúságút ezek közül az x szám $K(x) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *Kolmogorov-komplexitásának* (vagy *algoritmikus hosszúságának*) nevezzük. Jelölésben: $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$K(x) := \begin{cases} +\infty & \text{ha } x \notin \mathbb{T} \\ \\ \inf\limits_{T_x \in X} |T_x| < +\infty & \text{ha } x \in \mathbb{T} \ . \end{cases}$$

Egy adott x számra csak annak van jelentősége, hogy $K(x)$ végtelen (x nem sűríthető) vagy pedig véges (x sűríthető); utóbbi esetben, hogy pontosan mennyi ez a véges érték nem számít, mert függ az L kódolási nyelv részleteitől, stb. Ezt megértve (tehát egy rögzített L nyelvet használva) először is belátható, hogy tetszőlegesen nagy Kolmogorov-komplexitású valós számok léteznek (pl. $K(\Omega) = +\infty$); másodszor, fontos kérdés, meg tudjuk-e mondani egy valós számról, hogy mennyi a Kolmogorov-komplexitása? A kérdés ekképpen tehető értelmessé. Tegyük föl, hogy adott egy elsőrendű logikán alapuló L formális nyelven megfogalmazott S axióma-rendszer (pl. a ZFC egy ilyen). Ha az axióma-rendszer elegendően bonyolult, akkor benne meg tudunk fogalmazni állításokat valós számokról. Egy ilyen állítás lehet az, hogy pl. „az $x \in \mathbb{R}$ valós számra $K(x) = n$" (persze megfelelően formalizálva az L nyelv szerint, mi most továbbra is a *természetes nyelvet* használjuk). Kérdés: bizonyíthatóak-e ilyen állítások S-ben? Már sejtjük, hogy itt megint valami gond lesz:

Tétel (Gödel–Chaitin nem-teljességi tétel). *Minden elsőrendű logikán alapuló L formális nyelven megfogalmazott, elegendően bonyolult S axióma-rendszerhez létezik egy $N_S \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy nem létezik olyan $x \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy az állítás: $K(x) \geqq N_S$ bizonyítható lenne S-ben.*

Ez megint nagyon zavaró, mert azt mutatja, hogy egy bizonyos bonyolultságon túl semmit nem tudunk mondani *precizen* egy valós szám bonyolultságáról. Ez nagyban hasonlít arra, ahogy *tisztán véletlen eseménysorokat* sem tudunk jellemezni másképp, minthogy azt mondjuk: ez egy tisztán véletlen eseménysor. Amennyiben egy x számra $K(x) = +\infty$, akkor helyesen gondoljuk, hogy az x tizedesjegyei egy *tökéletesen véletlen számsorozatot* alkotnak. Pl. az Ω szám *per constructionem* ilyen. De hogy egy adott, „nem mi általunk készített", hanem „odakintről jövő" $y \in \mathbb{R}$ szám ilyen-e, azt *semmiféle módon nem tudjuk megállapítani.* A nem-kiszámítható számokkal kapcsolatos sorozatos negatív észrevételek egyes radikális (techno-materialista) gondolkodású matematikusokat (pl. *R. Hamming*) arra késztettek, hogy e számok létezését egyszerűen elvessék és javasolják, hogy a *Dedekind*-féle XIX. sz-i nem-előállítható aritmetikai kontinuumot a *Turing*-féle XX. sz-i előállítható halmazra kellene lecserélni (amely tehát csak megszámlálhatóan végtelen sok $\mathbb{T}$-beli számból állna).

Elérkeztünk *Brouwer* észrevételéhez a valós számokról tehető kijelentések logikai szerkezetével kapcsolatban. Most már tudjuk, hogy vannak igen természetes és fontos kérdések valós számokról (pl. algoritmikusan nem-sűríthető-e? irracionális-e?, stb.), melyek szigorú keretek között általában nem válaszolhatók meg. Most az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy egyszerű és szintén természetes, ám az igazat megvallva elég haszontalan kérdést: mennyi a $\pi = 3,1415\ldots = 3,a_1a_2a_3\ldots$ (tehát $a_j \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ most a π tizedesjegyei) tizedesjegyeinek átlaga, az

$$A := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

szám? Nyilván az egy igaz állítás, hogy „biztos, hogy vagy $A = \frac{9}{2}$ vagy $A \neq \frac{9}{2}$" (ha ez utóbbi esetbe bele értjük azt is, ha $A \in \mathbb{R}$ esetleg mint határértek nem is létezik). Viszont ebből sem az nem következik, hogy $A = \frac{9}{2}$ sem az, hogy $A \neq \frac{9}{2}$. Ugyanis, mivel *aktuálisan* nem ismerjük a π *összes* tizedesjegyét, a kérdést *most* nem tudjuk megválaszolni (annak ellenére, hogy $\pi \in \mathbb{T}$ így létezik algoritmikus kifejtése, ez csak *potenciálisan* adja meg a számjegyeket, ui. az *összes* tizedesjegy előállítása végtelen időt vesz igénybe). Ez hasonlít a *jövőbeli eseményekre* vonatkozó kijelentések szerkezetéhez. A „biztos, hogy holnap vagy esik, vagy nem esik" igaz állítás, de ebből sem az nem következik, hogy „holnap biztosan esik" sem az, hogy „holnap biztosan nem esik".

Egy érdekes fizikai analógiával fejezzük be. Az idő legsajátosabb jellemzője annak *idő-szerűsége*, vagyis inhomogén hármas szerkezete: áll a múltbeli tényekből, áll egy pillanatszerű jelenből amit mint egyetlen eseményt éppen mindig megélünk, és áll a jövőbeli lehetőségekből. A múlt *tényszerűsége*, szubjektíve legalábbis, úgy jelenik meg, hogy lehet rá emlékezni, míg a jövő *lehetőségszerűsége* úgy, hogy nem. *Carl F. von Weizsäcker* német fizikus kérdezi, hogy a múltra való emlékezhetőség és a jövőre való nem-emlékezhetőség mindössze a mi szubjektív benyomásunk az időről, vagy tényleg létezik valami objektív a fizikai világban ami ennek alapjául szolgál? A válasz az, hogy igen. A modern információ-elméletben, melynek alapjait *Claude Shannon* amerikai kutató-mérnök fektette le, egy x esemény $I(x)$ *információ-tartalmát* az esemény $p(x)$ bekövetkezési valószínűsége inverzeként definiáljuk: minél valószínűtlenebb egy esemény bekövetkezése, annál nagyobb az információ-tartalma. Pontosabban az x esemény bitekben mért információ-tartalma $I(x) := -\log_2 p(x)$. Pl. annak a nem túl meglepő eseménynek, hogy egyetlen pénzfeldobás végeredménye „fej" lesz, pontosan 1 bit az információ-tartalma, míg annak a valószínűtlenebb dolognak, hogy egy dobókockával egymás után tízszer is hatost dobok, majdnem 26 bit.[13] A fizika egyik legfontosabb tapasztalati felismerése a *második főtétel*, mely kimondja, hogy egy zárt fizikai rendszer H entrópiája az időfejlődése során nem csökken. A newtoni mechanika szerint lehetne másképp is, de empirikusan bizonyosan az teljesül, hogy egy fizikai rendszer időbeli fejlődése során kisebb entrópiájú kezdeti állapotokból egyre nagyobb entrópiájú későbbi állapotok felé tart. Mivel az entrópia a rendszer rendezetlenségének mértéke, kisebb entrópia nagyobb rendezettséget, s így az összes lehetséges konfigurációkat tekintve valószínűtlenebb állapotot jelent. Tehát empirikus tény az, hogy a rendszer fejlődésének eseménysorában a jelen pillanathoz képest a múlt rendkívül valószínűtlen és ennélfogva nagy információ-tartalmú, míg a jövő rendkívül valószínű, tehát kis információ-tartalmú történésekből áll. Ezért a mindenkori jelen pillanatból tekintve a múlt éppen olyan, hogy nagy információ-tartalma miatt lehet rá emlékezni, míg a jövő olyan, hogy nem lehet rá emlékezni. *Weizsäcker* szerint az idő említett szubjektív szerkezete, ill. az idő idő-szerűsége maga, a második főtétel fennállásának objektív tapasztalati tényével ekvivalens. Ebben a kontextusban bevezethető egy x valós szám $p(x) \in [0,1]$ „bekövetkezési valószínűsége", ami azt méri, számjegyek tetszőleges egymás után írásával előállítjuk-e x-et; mivel egy tipikus valós számban semmiféle mintázat sincs, vagyis algoritmikusan nem sűríthető, $p(x) := 1 - 2^{-K(x)}$ egy természtes

[13] Fontos hangsúlyozni, hogy egy esemény információ-tartalmának semmi köze nincs az esemény esetleges jelentéséhez, értékéhez. Tehát előfordulhat, hogy egy nagy információ-tartalmú eseménynek számunkra semmi jelentése stb. nincs, és fordítva.

választás, hiszen fennáll, hogy $p(x) = 1$ amennyiben $x \notin \mathbb{T}$ és $p(x) < 1$ különben. Ekkor az x szám „információ-tartalmára” teljesül, hogy $I(x) = 0$ minden $x \notin \mathbb{T}$ elemre. Tehát egy tipikus valós számnak nincs információ-tartalma, mert „bekövetkezése” nagyon valószínű, lévén számjegyei teljesen véletlenek. *Brouwer* észrevétele ill. a fizikai idővel kapcsolatos most kifejtett analógia alapján a *Gödel–Chaitin*-tételt úgy is interpretálhatjuk, hogy egy tipikus x valós szám Kolmogorov-komplexitása azért nem állapítható meg „most”, mert „az x a kérdezés pillanatához képest jövőbeli esemény”. Ellenben pl. egy megfelelően egyszerű r racionális szám Kolmogorov-komplexitása megállapítható „most”, mert „az r múltbeli esemény”.

Ekképpen összegezzük (és egyúttal interpretáljuk is) az eddigieket: *az aritmetikai kontinuum, vagyis a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza idő-szerű tulajdonságokkal is rendelkezik és ez a halmaz nem befejezett konstrukció abban az értelemben, hogy a kontinuum pontokra való felosztása aktuálisan, vagyis „most”, nem végezhető el.*

3. Az aritmetikai kontinuummal kapcsolatos fizikai problémák

Áttérünk a modern fizika felvetette kédésekre. Sajnos ismét föl kell adnunk a szabatosságot, mert a megemlítendő fizikai konstrukciók matematikailag preciz bevezetése és tárgyalása messze meghaladja ennek az írásnak a kereteit. Emiatt is ezt a fejezetet nem nyújtjuk hosszúra. Röviden már most összefoglalva azt fogjuk látni, hogy egy adott helyes, jól működő fizikai elméletben mint (az aritmetikai kontinuumot használó) matematikai modellben megjelennek divergens megoldások. Ennek a fizikai elméletnek tapasztalatok diktálta, még jobban, általánosabban működő tovább-fejlesztésében az előző divergenciák eltűnnek, viszont megjelennek újfajta divergenciák. *Míg egyszerűbb elméleteinkben közvetlen fizikai tapasztalataink által mindig el tudjuk dönteni, hogy ezek a divergenciák fizikailag léteznek-e vagy csak a matematikai modell artifaktumai, későbbi, általánosabb és elvontabb fizikai elméleteinkben e divergenciák ontológiai státuszáról egyre nehezebb nyilatkozni.*

A *klasszikus mechanika* newtoni elméletében ideális, *pontszerű* rszecskék gravitációsan vonzzák egymást úgy, hogy ennek az erőnek a nagysága a részecskék térbeli távolsága négyzetének az inverzével arányos. Tehát ez az erő *végtelenhez* tart, ha a részecskék közelednek egymáshoz. Mi történik, ha két részecske összeütközik? Először is, ha a valóságban két bolygó közel kerül egymáshoz, akkor a pontszerű idealizálás érvényét veszti. De ettől függetlenül, ha a newtoni mechanikát mint *matematikai elméletet* szeretnénk tanulmányozni, a kérdés feltehető; sőt fel is kell tenni, ha az aritmetikai kontinuum fizikában játszott szerepét akarjuk tisztázni. Az derül ki, hogy létezik egy „leghelyesebb eljárás” arra, hogy *két* részecske pályáját folytassuk egészen az ütközésig és azon túl is: ennek során a részecskék sebessége, mozgási energiája egy „pillanatra” ugyan végtelen naggyá válik, de mind az ütközés előtt, mind utána szépen véges lesz. De mi történik, ha egyszerre három részecske ütközik? Vagy még több? A helyzet komollyá válik akkor, ha öt pontszerű részecske mozgását tanulmányozzuk a newtoni mechanika szerint. 1992-ben bizonyították be, hogy ekkor már létrejöhetnek nem-ütközés-jellegű szingularitások is: az ötrészecskés rendszernek vannak olyan megoldásai, amelyekben elindítás után véges idővel az egyik részecske kirepül a végtelenbe. A mechanizmus részletes ismertetése helyett a dolog lényegére világítunk rá: mint már említettük, a newtoni mechanikában a gravitációs erő a forrás felé haladva elég gyorsan végtelenhez tart, ami azt eredményezi, hogy minden pontrészecskéhez végtelen nagy gravitációs potenciális energia tartozik. Ez az energia nem homogénen oszlik el az egész térben, hanem végtelen nagy része a részecske körüli tetszőlegesen kicsi golyóban összpontosul és e kis környezeten túl az energia már véges. A bajok mindig abból származnak, hogy részecskék egymáshoz túl sokszor túl közel kerülve—anélkül, hogy ütköznének—ezeket a magukkal hordozott végtelen nagy potenciális energiákat ki tudják aknázni és végtelen nagy mozgási energiává alakítani.[14] Természetesen ezek az elszállások nem lehetségesek a valódi világban, de tudnunk kell, hogy a newtoni mechanikában nincs felső sebesség-határ. Lehetséges, hogy ezek az elszálló megoldások csak nagyon speciális kezdőfeltételek esetén jelentkeznek, tehát annak ellenére, hogy léteznek, „elhanyagolhatók". De jó okunk van feltételezni, hogy az egymás körül bóklászó részecskék számának növekedésével egyre több kezdőfeltétel mellett jelentkeznek a divergenciák. A dolog elég nyugtalanító, ha a Naprendszerre gondolunk.

A *kvantummechanikában*, ahol is a *Newton*-féle mozgásegyenletet a *Schrödinger-egyenletre* és a pontszerű részecskét a kvantummechanikai hullámfüggvényre cseréljük, az előző probléma megoldódik. Ennek oka, megint csak nagyon vázlatosan, a *Heisenberg*-féle *határozatlansági reláció*, mely a kvantummechanikai részecskét megakadályozza abban, hogy túl hosszú időre túl közel menjen egy másik részecskéhez és így „begyorsuljon". De ennek preciz bizonyítása a kvantummechanika matematikai apparátusát használva meglehetősen nehéz és csak 3 térdimenzióban működik.

Tekintsük a *klasszikus elektrodinamikát*, amikor is pontszerű töltött testekre alkalmazzuk. A *Faraday–Maxwell*-féle elektrodinamika mind fizikai mélységét, mind matematikai eleganciáját tekintve az emberi gondolkodás egyik legszebb alkotása, de amikor összeeresztjük a szintén jól teljesítő newtoni mechanikával, a két elmélet egészen gyorsan romba dönti egymást. Talán nem túlzás azt mondani, hogy ez a témakör—az elektromágneses térben mozgó ponttöltés problematikája—az elméleti fizika legtragikusabb fejezete. Egy e elektromos töltésű, m tömegű és $\mathbf{v}$ sebességű „elektromosan töltött pontszerű részecskére" a *külső* $\mathbf{E}$ elektromos és $\mathbf{B}$ mágneses terek a *Lorentz-erővel* hatnak és a részecske mozgását megadó *Newton*-féle mozgás-egyenlet ekkor az

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = e(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{2}$$

alakot ölti. De minden elektromosan töltött testnek *belső*, vagyis sajátmaga által is keltett elektromágneses tere is van. Hogyan hat ez a tér a részecskére saját magára? A problémák ugyanúgy kezdődnek, mint a klasszikus mechanikában. A legegyszerűbb elektromágneses kölcsönhatás során, mely egymáshoz képest nyugvó ponttöltések között lép fel, a részecskék között ható vonzó vagy taszító erő megint csak arányos a részecskék térbeli távolsága négyzetének az inverzével. Ezért legegyszerűbb esetben, egy origóban nyugvó ponttöltés esetében ez a belső tér egy sztatikus elektromos mező mely a tér $\mathbf{r}$ pontjában és t időpillanatban

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = & \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \\ \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = & 0 \end{cases}$$

alakú (ε_0 a vákuum permittivitási állandója), tehát az elektromos tér a töltés felé haladva r távolságban tényleg $|\mathbf{E}(\mathbf{r})| \sim 1/r^2$ szerint növekszik és pontosan abban az $\mathbf{r}=0$ pontban, ahol a részecske éppen tartózkodik, végtelen naggyá válik. Ezért $\mathbf{E}$-t nem tudjuk behelyettesíteni a (2) egyenletbe, nem tudjuk azt elkezdeni megoldani. Ezzel összefüggésben a nyugvó részecske E teljes elektromos energiája:

$$E = \frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{r^4}r^2\mathrm{d}r = +\infty$$

[14]Ezt a *parittya-elvnek* nevezett mechanizmust alkalmazzák a NASA űrszondái a Naprendszer bolygóihoz való eljutáskor. Természetesen eddig egyszer sem fordult elő a gyakorlatban, hogy véges idő alatt bármi is „kirepült volna a végtelenbe".

is divergens de úgy, hogy a ponttöltés körüli tetszőlegesen kicsi R sugarú B^3_R golyóban ill. azon kívül

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{B^3_R}|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2\mathrm{d}\mathbf{r}=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^R\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r=+\infty \quad , \quad \frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B^3_R}|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2\mathrm{d}\mathbf{r}=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\int\limits_R^{+\infty}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}<+\infty$$

tehát mint a klasszikus mechanikában, végtelenül nagy energia koncentrálódik a ponttöltés körül amit *saját maga okoz*. Első próbálkozásként megpróbálhatjuk úgy orvosolni mindkét problémát, hogyha azt mondjuk, az elektron nem egy idealizált *pont*, hanem egy véges R sugarú $S^2_R\subset\mathbb{R}^3$ gömb (R a *klasszikus elektronsugár*) felszínén egyenletes töltés-eloszlással. Ekkor a saját mezeje értelmes abban a pontban, ahol éppen tartózkodik és energiája az $\mathbb{R}^3\setminus B^3_R$ rész járuléka:

$$E=\frac{1}{2}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

lesz, szintén véges. Ez a naiv elképzelés az elektronról a speciális relativitás-elmélettel egybevetve azonban ellentmondásra vezet. Mert azon túl, hogy már az „R-sugarú gömb” tisztán geometriai fogalma sem egyeztethető össze az elmélet alapelveivel (ui. a *Lorentz-transzformációkkal* szemben nem invariáns) és az elektron semmiféle kísérletben sem jelenik meg tényleges golyóként, még a legnagyobb energiájú ütközésekben is pontszerűnek tűnik—ha az elektron mint gömb kísérletekben megfigyelt m nyugalmi tömege tisztán saját elektromágneses energiájából származik akkor, mint *Hendrik Lorentz* holland fizikus megmutatta,

$$m=\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 Rc^2}$$

(itt c a fénysebesség) kell fennálljon és így az elektron nyugalmi energiájára $E=\frac{3}{4}mc^2<mc^2$ adódik. Lényegében azért, mert mint *Henri Poincaré* francia matematikus-fizikus észrevette, ebben az esetben az elektron (mely tehát most egy R sugarú gömb, de felszíne viszont továbbra is pontokból áll) egyes elektromosan töltött részeire más ugyanolyan elektromosan töltött részei taszítólag hatnak; ennélfogva kell egy nem-elektromos eredetű erő, mely az elektron-gömböt a saját magát szétrobbantani igyekvő elektromágneses ön-taszítása ellenére is végül is egyben tartja. Ennek az újfajta erő okozta erőtérnek az energiáját is beszámolva kell kiadódnia a híres $E=mc^2$ formulának.[15]

Elfogadva tehát egy nem-elektromos erő létezését is, a hozzá tartozó energiát az elektromágneses energiához alkalmasan hozzáadva megpróbálhatunk az $R\to 0$ limeszben valami értelmes *véges* elektronmodellt kapni. Másképpen fogalmazva, valamilyen véges $0<R$ esetén vegyük az elektron $m_0(R)$ „csupasz”, vagyis az $m_{\text{elektromos}}(R)<+\infty$ saját elektromágneses terének energiájából származó tömegének kivonása után maradó tömegét és tartsunk R-rel nullához úgy, hogy

$$m_{\text{elektromos}}(R)+m_0(R)\longrightarrow m \quad \text{amikor } R\longrightarrow 0$$

ahol m az elektron kísérletekben megfigyelt tényleges tömege. Mivel már tudjuk, hogy ebben a limeszben $m_{\text{elektromos}}(R)\sim 1/R\to+\infty$ ezért valahogyan $m_0(R)\to-\infty$ is kell teljesüljön és így a megfigyelt, fizikai elektrontömeg $m=+\infty-\infty$ matematikailag teljesen értelmetlen alakban adódik.[16] Ezt a rendkívül gyanús eljárást így nevezik: *renormálás*. Az elektront ekképpen felépítve megpróbálhatjuk megoldani azt a problémát, hogyan mozog ez az objektum a maga keltette térben. A probléma

[15] Ma tényleg úgy gondoljuk, hogy az elektron teljes m tömegének eredetéért valóban nem csak az elektromágneses, hanem a *Higgs-mező* is felelős.

[16] Természetesen a „csupasz tömeg” fikció, soha nem megfigyelhető, hiszen az elektron elektromos töltését soha sem tudjuk „lekapcsolni” magának az elektronnak a megszüntetése nélkül. Így azt is feltehetjük, hogy $m_0(R)\to-\infty$, ha $R\to 0$.

saját farkába harapó kígyóként tekergőzik előttünk és ezért igen nehéz. A kérdésre adott válasz az *Abraham–Lorentz–Dirac* egyenlet—a (2) egyenlet finomítása—megoldásaként adódik, mely a fizika egyik legrosszabbul sikerült egyenlete. Ui. nagyon sok olyan megoldása van, amelyek egyáltalán nem emlékeztetnek ismert fizikai jelenségekre. Pl. előfordulhat, hogy egy magányos elektron a saját maga keltette térben a fénysebességet közelítve egyre gyorsul (*öngyorsító* vagy *elfutó elektron*). Tehát minden erőfeszítésünk ellenére újra előállt a klasszikus mechanikából már megismert szituáció, hogy egy pontszerű részecske a saját maga közelében elhelyezkedő végtelen nagy potenciális energiát megcsapolja és elszáll. Egy másik megoldás az, amikor *két*, különböző töltésű, kezdetben nyugvó részecske ahelyett, hogy egymást vonzva véges idő alatt összeütközne (ez a fizikai tapasztalat), kezdeti vonzódás után elkezdik taszítani egymást és végül is szétrepülnek. Ezeket az instabilitásokat, divergenciákat mind az okozza, hogy a fizikai elmélet matematikai modelljében az aritmetikai kontinuum aktuálisan végtelen entitásokból áll. Feladjuk hát a végtelennel vívott küzdelmünk e frontvonalát; tesszük azért is, mert általános megegyezés uralkodik abban, hogy a fenti *klasszikus elektron*-felfogásból eredő paradoxonok csakis e klasszikus fogalmak (elektromosan töltött golyó, klasszikus elektromágneses mező, stb.) radikális elvetésével és a relativitás- és kvantum-elméletek elveinek figyelembevételével, tehát *teljes paradigmaváltással* oldhatók meg.

Következzék hát a *relativisztikus kvantum-elektrodinamika*, melytől a fenti bajok orvoslását remélték. Ez az első nem Európában és a II. Világháború alatt-után született fundamentális fizikai elmélet: *Freeman Dyson, Richard Feynman, Julius Schwinger* amerikai és *Tomonaga Shinichiro, Yukawa Hideki* japán fizikusok elképesztő szellemi alkotása. Kezdjük mindjárt azzal, hogy a fentebbi lyukak befoltozása nemhogy nem sikerült, hanem a problémák inkább eszkalálódtak és ez az elmélet mind fizikai (szemantikai), mind matematikai (szintaktikai) szinten ellentmondásos: a végtelen egyre ismeretlenebb arcait mutatja felénk. Ugyanakkor a valaha kidolgozott legpontosabb fizikai elmélet is: egyes számszerű jóslatai *tizenkét tizedesjegy pontossággal* egyeznek meg kísérleti mérési eredményekkel!

A rendkívül bonyolult technikai részleteket mellőzve rögtön a lényegre térünk. Az elmélet olyan kérdések nagypontosságú megválaszolására alkalmas, hogy pl.: mi történik olyan elemi jelenség, ún. *szórási folyamat* során, amikor is két elektron egymás közelében elrepülve, egymás elektromos taszításától pályát változtatva tovább repül? Ha az elektronnak nem volna e elektromos töltése, akkor ez egy igen egyszerű folyamat lenne, hiszen a két részecske irányváltoztatás nélkül repülne el egymás mellett. Minél nagyobb viszont az e értéke, ez a folyamat annál hevesebb. Tehát az elmélet legfontosabb paramétere egy mértékegység nélküli szám, az ún. *finomszerkezeti állandó*:

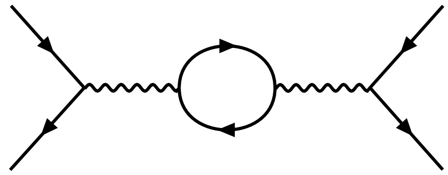
$$\alpha := \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

(ahol az eddigi, már megismert, fizikai állandók mellett $\hbar$ a Planck-állandó) amelynek négyzetgyöke, $\alpha^{\frac{1}{2}}$, az elektromos töltés mértékegységtelenített verziójának tekinthető és azt jellemzi, hogy „úgy igazából” mennyire erős az elektromágneses kölcsönhatás. Ez a szám valahogy furcsa és senki sem tudja, hogy miért éppen ekkora,[17] de mindenesetre meglehetősen kicsi értéke óriási szerencseként lehetővé teszi, hogy a fenti kérdésre (tehát, hogy pl. hány fokos szöggel térülnek el az elektronok eredeti pályájuktól?) a válasz egy, az $\alpha^{\frac{1}{2}}$ hatványai szerint haladó

$$A_0 + A_{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}} + A_1\alpha + \ldots + A_{\frac{n}{2}}\alpha^{\frac{n}{2}} + \ldots \tag{3}$$

[17] *W. Pauli*, a kvantummechanika egyik atyja, a zürichi kórház 137-es számú kórtermében halt meg 1958. december 25-én, 58 évesen. Az egyre pontosabb mérések szerint viszont $\alpha^{-1} = 137{,}0359\ldots$, tehát nem egészszám.

végtelen számsor alakjában álljon elő. Ez a sor úgy adódik, hogy a valódi (valójában végtelenül bonyolult) fizikai szórási jelenséget elemi, hipotetikus folyamatok összességére bontjuk. Minden ilyen elemi folyamat egy-egy *Feynman-gráffal* szimbolizálható; pl. a



Feynman-gráfot úgy kell olvasni, hogy jön a két *valódi elektron* (felső egyenes vonalak), egymást érzékelve egy *virtuális foton* kibocsájtásával (hullámos vonalak) elektromágneses (taszító) kölcsönhatásba lépnek, de közben ez a virtuális foton egy pillanatra *virtuális elektron-pozitron párrá* is szétesik-majd-összeáll (belső, egyenes vonalakból álló kör), végül a két *valódi elektron* tovább repül (alsó egyenes vonalak). Ez a gráf 4 csúcsot tartalmaz ezért járuléka $(\alpha^{\frac{1}{2}})^4 = \alpha^2$ rendű és a (3) sor A_2 együtthatójában jelenik meg. Általában, egy adott n csúcsú Feynman-gráf $\alpha^{\frac{n}{2}}$ nagyságrendű korrekciót jelent, vagyis egyre kisebb a járuléka a folyamathoz. Ennek a rendkívül gyorsan bonyolódó sornak az *első néhány tagja* a kísérleti eredményekkel nagy pontossággal megegyezik; viszont a nem-izomorf Feynman-gráfok száma az n növelésével rohamosan emelkedik ezért nem nyilvánvaló, hogy a fentebbi sorban az $A_{\frac{n}{2}}$ együtthatók n növekedésével hogyan viselkednek.[18] Ez kérdésessé teszi, hogy a perturbációs sor konvergál-e egyáltalán egy „valódi” végeredményhez.

De ne szaladjunk előre. Minden Feynman-gráf numerikus járulékát a fentebbi sorhoz a gráfból bizonyos szabályok szerint kiolvasandó integrálok adják. Pl. a fentebbi Feynman-gráf esetén ez

$$I = \int_0^{+\infty} f(\mathbf{p})\mathrm{d}\mathbf{p}$$

alakú, ahol $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^4$ a legbelső körben futó virtuális elektron-pozitron párhoz tartozó négyes-impulzus. Mivel ez a két közbülső részecske nem detektálható, ezért a négyes-impulzusuk (az összes lehetséges négyes-impulzus megmaradási tételt kihasználva is) tetszőleges értéket felvehet, mindezeket vesszük figyelembe az integrálással. *De sajnos az a baj, hogy egy ilyen integrál tipikusan végtelen*! Tehát a (3) sorban már minden n-re az $A_{\frac{n}{2}}$ együtthatók is külön-külön végtelenek. A probléma abból származik, hogy végtelenig integrálunk, mert tetszőlegesen nagy belső impulzusokat is meg kell engednünk. A nagy impulzus nagy energiát, tehát kicsi térbeli távolságot jelent; tehát a fentebbi integrál az elektront annak „nagyon közelében is letapogatja”, vagyis a divergencia pontosan ugyanazért jelenik meg újra, mint amiért a klasszikus elektrodinamikában is megjelent. A végteleneket egy hasonló *renormálási eljárással* próbáljuk meg eltüntetni, mint a klasszikus esetben. Most az R véges elektronsugár inverzét, a $\Lambda \sim 1/R$ *levágási paramétert* vezetjük be és csak Λ-ig integrálva tekintjük a véges, de már Λ-tól függő Feynman-gráf járulékokat. Pl. a fentebbi esetben vesszük az

$$I(\Lambda) = \int_0^{\Lambda} f(\mathbf{p})\mathrm{d}\mathbf{p} < +\infty$$

Λ-függő integrált. Az elektron végtelen sajátenergiájának (már klasszikusan is megjelenő) problémája most ekképpen jelentkezik. Bizonyos fajta (ún. *elektron-sajátenergia* típusú *gráfokhoz* tartozó, l. alább)

[18] Pl. az elektron g mágneses momentumának α^5 rendű kiszámolásához már kb. 13.000 Feynman-gráf járulékát kell összegezni. Ez az óriási számolás a mérési eredményekkel egybevetve a g étékét *tizenkét tizedesjegy pontossággal* adja meg.

integrálok összegzésével a kvantum-elektrodinamikában az elektron kísérletekben is megfigyelhető m tömegét tudjuk kiszámolni. Tekintsük most ezen integrálok $m_{\text{elektromos}}(\Lambda)$ összegét a Λ levágással. Valójában ahhoz, hogy ezt a számolást el tudjuk kezdeni, már egy $m_0(\Lambda)$ tömeg-paramétert eleve be kell tenni az integrálokba. Ez megint csak az elektron hipotetikus „csupasz tömege”. Ezt válasszuk meg úgy, hogy

$$m_{\text{elektromos}}(\Lambda) + m_0(\Lambda) \longrightarrow m \quad \text{amikor } \Lambda \longrightarrow +\infty$$

teljesüljön. Megint csak, mivel $\Lambda \to +\infty$ során $m_{\text{elektromos}}(\Lambda) \to +\infty$ ezért föl kell tennünk, hogy $m_0(\Lambda) \to -\infty$ és így nem igazán meggyőzően az elektron mérhető tömege $m = +\infty - \infty$ alakban áll elő. Ez az *elektrontömeg renormálása* a kvantum-elektrodinamikában. Az elektron e mérhető elektromos töltése is hasonloóan számolható bizonyos (*vertex-korrekció* típusú *gráfokhoz* tartozó, l. alább) integrálok összegeként. A levágott integrálok $e_{\text{elektromos}}(\Lambda)$ összegében bemenő adat az $e_0(\Lambda)$ „csupasz töltés” és megint úgy próbálunk meg ügyeskedni, hogy

$$e_{\text{elektromos}}(\Lambda) + e_0(\Lambda) \longrightarrow e \quad \text{amikor } \Lambda \longrightarrow +\infty$$

teljesüljön, vagyis $e = +\infty - \infty$ (az *elektromos töltés renormálása*). Csupán az 1960-as évek végére sikerült megnyugtatóan tisztázni, hogy ez az eljárás működik abban az értelemben, hogy tetszőleges $n < +\infty$ esetén az *összes*, n-nél nem nagyobb rendű Feynman-gráfból *egyszerre* eltüntethetők a végtelenek úgy, hogy mindössze *három* kiindulási paramétert tartatunk a végtelenbe alkalmas módon, amikor $\Lambda \to +\infty$; ezek a csupasz elektrontömeg: $m_0(\Lambda) \to -\infty$, a csupasz töltés: $e_0(\Lambda) \to -\infty$ és van még egy bizonyos $Z_0(\Lambda) \to -\infty$ mennyiség is (az ún. *vákuum-polarizációs* típusú *gráfokból*, l. alább).[19] De mi a „csupasz elektron”, tehát az „elektromágneses tér nélküli elektron” ontológiai státusza? Tényleg van ilyen divergens objektum a természetben vagy csak a mi matematikai eljárásunk működtetéséhez van rá szükség? Ez és hasonló kérdések sok fizikust töltöttek el komoly kétségekkel afelől, hogy a renormálás megengedhető-e (a matematikusok eleve iszonyodva utasítják el a renormálást jelen formájában). A Nobel-díjas *Paul Dirac* már az 1930-as években elfogadhatatlannak tartotta a renormálást, de az eljárás egyik kitalálója (a szintén Nobel-díjas) *Feynman* is 1985-ben, három évvel halála előtt úgy nyilatkozott, hogy a „renormálási hókusz-pókusz” matematikailag nem megengedhető és a kvantum-elektrodinamika konzisztenciája csak akkor lesz bizonyítható, ha megszabadítjuk a renormálási eljárásoktól. A kérdés máig nem tisztázott.

Az igazi gondok azonban csak most kezdődnek. A renormálás kivitelezhetősége tehát azt jelenti, hogy a Feynman-gráfokat csúcsaik száma, vagyis n szerint csoportosítva, minden rögzített n esetén a levágott (3) perturbációs sor $A_{\frac{n}{2}}(\Lambda)$ együtthatói minden $\leqq n$ esetén végesek lesznek a $\Lambda \to +\infty$ limeszben, amennyiben megfelelő módon egyúttal $m_0(\Lambda), e_0(\Lambda), Z_0(\Lambda)$ is divergálnak. De mi van akkor, ha a Feynman-gráfokat másképpen soroljuk föl? Pl. egy ilyen lehetőség, hogy nem az n csúcsszám, hanem a bennük levő hurkok h száma szerint (a példánkban szereplő Feynman-gráfban ugyan $n = 4$, de $h = 1$ mert pontosan egy hurkot tartalmaz). Ekkor az derül ki, hogyha még csak az összes $h \leqq 1$ típusú Feynman-gráfok járulákát tekintjük, akkor is létezik egy $\Lambda < +\infty$ érték, hogy már ezen véges levágási paraméternél is $e_0(\Lambda) = +\infty$, vagyis várhatóan a $\Lambda \to +\infty$ limeszben a $h \leqq 1$ Feynman-gráfok járuléka divergens. Ez a véges Λ érték a *Lev D. Landau* orosz fizikus és munkatársai által az 1950-es években fölfedezett *Landau-pólus*. A Landau-pólus akkor is megjelenik, ha a $h \leqq 2$ gráfokra is összegzünk. De azt nem tudjuk, hogy mi történik, ha az összes $h = 3$ gráf járulékát is figyelembe vesszük. Habár a Landau-pólus $h \leqq 1$ esetben számolt értékéhez tartozó $\hbar/\Lambda \approx 10^{-294}$ m távolság

[19] A kvantum-elektrodinamikában összesen háromféle *elsődlegesen* divergens Feynman-gráf van: az összes többi divergens gráf létezése ezek következménye. E három divergens gráf okozza azt, hogy három paramétert: az elektron m tömegét, e töltését és egy bizonyos technikai jellegű Z mennyiséget renormálni kell, de mást már nem.

rendkívüli kicsisége folytán elvi jelentőségű, a Landau-pólus megjelenése arra utal, hogy *a kvantum-elektrodinamika nem konzisztens elmélet, mert (3) perturbációs sorai divergensek.* Lényegében azért, mert a Feynman-gráfok száma olyan óriási mértékben nő, hogy $A_{\frac{n}{2}}$ járulékaik növekedése $n \approx 137$-től kezdve legyőzi a $\alpha^{\frac{1}{2}}$ hatványok csökkenését a (3) perturbációs sorban. Mindezen elvi jelentőség ellenére se felejtsük el, hogy a Landau-pólus felbukkanását a kvantum-elektrodinamika *matematikai megfogalmazásában* végül is az aritmetikai kontinuum szerkezete, vagyis tetszőleges feloszthatósága teszi lehetővé!

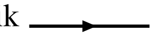
Érdemes megemlíteni egy *Poincarétól* származó remek példát a kvantum-elektrodinamikai (3) perturbációs sor divergenciájának a szemléltetésére (ő ezt a pédát még az égimechanikai pertubációszámítás kapcsán hozta föl). A példa egyúttal a fizikusok és a matematikusok világszemlélete közötti egyik különbségre is rávilágít. Az

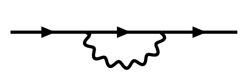
$$\frac{1000}{1} + \frac{1000^2}{1\cdot 2} + \frac{1000^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots$$

sort minden gyakorló fizikus divergensnek tekinti, mert az első néhány tagja egyre csak nő így ezen tagok összege nem ad jó közelítő eredményt; viszont ez a sor egy matematikus szerint konvergens, mert be tudja bizonyítani, hogy a teljes összege véges. Ezzel ellentétben az

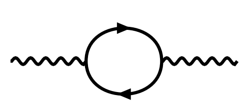
$$\frac{1}{1000} + \frac{1\cdot 2}{1000^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1000^3} + \dots$$

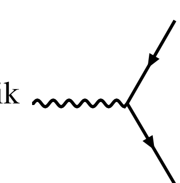
sort minden fizikus konvergensnek tekintené mert első néhány tagja egyre kisebb és összegük látszólag egyre pontosabb közelítő eredményt ad; viszont ez a sor egy matematikus szerint divergens, mert be tudja bizonyítani, hogy a teljes összege nem véges. A kvantum-elektrodinamika egyre bonyolódó perturbációs soraival a ptolemaioszi csillagászat módszereire emlékeztet, amikor is a bolygók égi látszólagos pályáit egyre bonyolódó epiciklusokkal, körsorokkal közelítették. De aztán jött *Kepler* és azt mondta, hogy nem: ezek a pályák valójában egyszerűen ellipszisek.

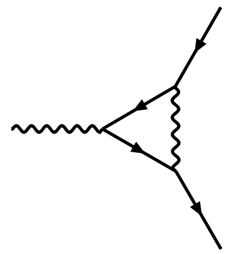
A hasonlatok mindig sántítanak: *Poincaré* példája is itt felhasználva egy kicsit félrevezető, mert azt az intuíciót sugározza, hogy mindössze megszámlálhatóan végtelen sok nem-izomorf Feynman-gráf van és a (3) sor kiszámolása valamiféle diszkrét (tehát mindössze $\mathbb{N}$ elemein végigfutó) összegzést igényel. Ezzel éles ellentétben viszont inkább úgy tűnik, hogy a Feynman-gráfok serege nem-megszámlálható, mert a valós számokhoz hasonlóan „bármely kettő között mindig van egy harmadik” de úgy, hogy a gráfok halmaza fa-szerűen szerteágazó módon, tehát nem-lineárisan vég nélkül bővíthető. Valóban, tegyük fel, hogy elkészítettük valahogyan a Feynman-gráfok izomorfizmus-osztályainak $\{\Gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ listáját, vagyis felsoroltuk őket a természetes számokkal indexelve. De ha ebben a feltételezett felsorolásban tekintünk egy adott Γ_k gráfot és benne az egyik  elektron-pozitron-vonalat, akkor ez a vonal „közelebbről megnézve” valójában



alakú (*elektron-sajátenergia gráf*). Hasonlóan, a Γ_k egy foton-vonala mindig bővíthető egy



gráffá (*vákuum-polarizációs gráf*). Végül pedig, ha a Γ_k gráf bármelyik  csúcsát nézzük meg nagyítóval, akkor



alakúnak (*vertex-korrekciós gráf*) látszódik. Ennélfogva a Feynman-gáfok teljes serege inkább valamiféle fraktálszerű, kontinuumra emlékeztető vad struktúrával bír és egyelőre teljesen áttekinthetetlen.

Az elektrodinamika modern általánosításai az ún. *Yang–Mills-elméletek*, amikben az elektrodinamika egyszerű belső szimmetria-csoportját bonyolultabb nem-kommutatív Lie-csoportokra cseréljük ki. Nem meglepő, hogy ezekben az elméletekben a fentebbi problémák még súlyosabb, még összetettebb formában jelentkeznek.

Inkább térjünk át az *általános relativitás-elmélet*, vagyis a *gravitáció* modern elméletének áttekintésére. Az általános relativitás-elmélet szinte minden szempontból jelentősen különbözik a kvantumtér-elméletektől: Európában született még a nagy háborús megrázkódtatások előtt és egyetlen fizikus, *Albert Einstein* hatalmas szellemi alkotása. A kvantum-elektrodinamikával szintén ellentétben *nem* kvantumtér-elmélet és részben emiatt is matematikai szerkezete teljesen világos és bárki által (megfelelő kitartással) elsajátítható. Viszont mégis van egy dolog, amiben a két elmélet közös: az általános relativitás-elmélet is a valaha kidolgozott legpontosabb elméletek egyike, jóslatai (pl. a 2016-ban, száz évvel elméleti fölvetésük után kimutatott gravitációs hullámok) legnagyobb egyezést mutatnak kísérleti eredményekkel. És van még egy: ez az elmélet sem mentes *divergenciák* felbukkanásától—bár ezekhez a hozzáállás egészen más, az elmélet művelői *elfogadják* őket mint fizikai jelentéssel, tehát ontológiai státusszal bíró entitásokat.

A matematikai részletek (amelyek tehát teljesen különböznek a kvantum-elektrodinamikáétól) szintén teljes mellőzésével, egyetlen mondatban: az általános relativitás-elmélet a természetben föllelhető gravitációs jelenségek leírásával foglalkozik; az elmélet szerint világunkat egy négydimenziós kontinuum, a *téridő* tölti ki, melynek geometriai *görbülete* felelős a fizikai világban megnyilvánuló gravitációs jelenségekért. Mivel a gravitáció az elektromágnességgel összevetve rendkívül gyenge kölcsönhatás, a relativitás-elmélet kijelentései földi jelenségekben nem igazán játszanak szerepet, hanem inkább csillagászati tapasztalatokkal vethetők jól egybe. A gravitációs kölcsönhatás egy másik dologban is lényegesen különbözik az elektromágnességtől: rendelkezik azzal a veszélyes tulajdonsággal, hogy mindent csak vonzani képes ami hajlamossá teszi szingularitások létrehozására. Ha egy tömegét tekintve a *Chandrashekar-határon* túli: a Napunkénál több mint 8-szor nagyobb tömegű csillag feléli energiaforrásait, akkor magja a saját súlyától hirtelen összeroppan, míg külső rétegei egy látványos szupernóva-robbanásban ledobódnak. Több ezer Földtömegnyi energia távozik el egyetlen, kb. 10 percnyi neutrínó-kitörésben ami annak a következménye, hogy a megroppanó csillag magjában elhelyezkedő atomok elektronjai a hatalmas gravitációs nyomás hatására egyszerűen belepréselődnek saját atommagjaikba és az ott lévő protonokkal neutronokká egyesülnek. Ami így keletkezik, az egyetlen hatalmas, néhány kilométer átmérőjű atommag: egy neutroncsillag. Olyan sűrű, hogy egyetlen teáskanálnyi belőle 110 millió tonnát nyomna egy mérlegre helyezve. De ha az így létrejött neutroncsillag tömege még mindig meghaladja a *Tolman–Oppenheimer–Volkoff-határt*, vagyis a kb. $1,5-3$ Naptömeget (mert az eredeti csillag a 20 Naptömeget is túllépte), akkor a neutroncsillag továbbra is instabil és saját súlya szorításában újból összeroppan: ui. ekkora tömegnél a gravitáció vonzereje már minden ismert fizikai taszító erőt, ami a neutroncsillagot még megtarthatná, meghalad. Valóban, a csillagászok nem találtak egyetlen, kb. 3 Naptömegnél nagyobb neutroncsillagot sem az égen. A nagyon nagy tömegű csillagok végállapota nem egy neutroncsillag, hanem valami egészen más: egy tisztán geometriai objektum, a *fekete lyuk*, mert az így létrejött tartományból a hatalmas gravitációs vonzás miatt már a fény—tehát semmi—sem tud kijönni. Egy hasonlatot megkísérelve: a fekete lyuk úgy viszonyul a tér és idő általunk ismert nyugodt vidékéhez, mint ahogy egy hatalmas, örvénylő vízesés a folyó azt megelőző és lassan felé hömpölygő szakaszához.[20] A fekete lyuk tartomány határa az *eseményhorizont*, ami hasonló a sík terepen látható perspektivikus horizonthoz: a téridő eseményhorizonton túli részét, a fekete lyuk belsejét annak tőlünk való „elgörbülése" folytán nem láthatjuk. Pl. a fekete lyuk tűlünk időbeli elgörbülése ekképpen jelentkezik: ha kívülről figyeljük egy tárgy behullását a fekete lyukba, akkor úgy fog tűnni, hogy a tárgy folyamatosan közeledik a tőlünk véges távolságban lévő eseményhorizont felé, de soha sem éri azt el—annak ellenére, hogy a bezuhanó megfigyelő azt fogja tapasztalni, hogy saját órája szerint igen rövid idő alatt átlépi az eseményhorizontot és már visszafordíthatatlanul a fekete lyuk belsejében folytatja tovább vészterhes utazását.

Ha az általános relativitás-elmélet helyes, akkor egy fekete lyuk belseje *téridő-szingularitást* tartalmaz: olyan régiót, ahol a téridő görbülete már végtelen nagy. Matematikai szempontból pontosan úgy, ahogy a newtoni elméletben egy tömegpont felé közeledve a gravitációs tér végtelen naggyá válik. Sok fizikus gondolja azonban, hogy az általános relativitás-elmélet által nem figyelembe vett kvantumjelenségek a fekete lyuk belsejében fölerősödnek és megakadályozzák egy teljesen végtelen görbületű tartomány létrejöttét. Ha így van, akkor téridő-szingularitás, vagyis az általános relativás-elméletben megjelenő divergencia is pusztán elméleti artifaktum, nem pedig a fizikai valóság része. Viszont az eddigi elméletekkel ellentétben az általános relativitás-elmélet a végteleneket nem matematikai konstrukciókon alapuló idealizált, hanem olyan tényleges csillagászati objektumokkal kapcsolja össze, melyek aktuálisan megfigyelhetők, vagy legalábbis hamarosan megfigyelhetők lesznek; ennélfogva az itteni végtelenek ontológiai megitélése óvatosságot igényel.

Az elfogadás mellett szólnak bizonyos, az általános relativitás-elmélet mélyszerkezetével kapcsolatos matematikai eredmények is, melyeket *Roger Penrose* és tanítványa, *Stephen Hawking* brit fizikusok értek el az 1960-70-es években. Bármely fizikai objektum a fekete lyuk szingularitása felé közeledve egyre jobban eltorzul, alakját veszti a fellépő roppant gravitációs árapály-erők miatt. De nem ez az egyetlen szörnyűség, ami vele történik: egy ilyen szingularitás felé zuhanva a saját órája szerint véges idő alatt „kirepül a végtelenbe", „kimegy a térből és az időből". Emiatt is a relativitás-elméletben akkor mondják, hogy egy téridő szingularitást tartalmaz, ha vannak benne olyan pályák, amik mentén mozogva egy anyagi test saját órája szerint véges idő alatt kirepülhet a végtelenbe (és nem akkor, ha a téridő végtelen görbületű tartományt tartalmaz, mint a fekete lyuk esetében). A téridő-szingularitást így általánosabban értve a *Penrose–Hawking szingularitási tételek* azt mondják ki, hogy különféle—fizikai szempontból plauzibilis—igen általános feltevések mellett a téridőben mindig megjelennek szingularitások, tehát ha az einsteini elmélet helyes (és jelen pillanatban nincs okunk ebben kételkedni), akkor a téridő-szingularitások a fizikai valóság elkerülhetetlen részei. A legfontosabb szingularitás maga az *ősrobbanás*, belátható világegyetemünk mintegy 13 milliárd évvel ezelőtti heves és szinguláris kezdete, aminek eredményeképpen a belátható tér most is tágul, amire a távoli galaxisok fényének megfigyelt szisztematikus vörös-eltolódása utal (*E. Hubble*, 1929). Kisebb léptékű szingularitások a kimerülő nagy csillagok összeomlásával, vagy a galaxisok középpontjában az anyag összezsúfolódásával létrejövő fekete lyukak (ez utóbbiak akár igen óriásiak is lehetnek). Mivel az ősrobbanás minden megfigyelő múltjában van, a hozzá tartozó, mindent és mindenkit elindító Nagy Szingularitás nem látható (de képezheti teológiai spekulációk tárgyát); hasonlóan, a fekete lyukak belső szingularitásai is a mindent elfüggönyöző eseményhorizontjaikon túl rejtőznek. Ezért a végtelennel való közvetlen szembe-

[20]További jelzők: a fekete lyuk mint „kapuját szélesre kitáró", ill. „sok vendéget fogadó" (*polydektész*), melyek az Alvilág uralkodójának, *Hádésznek* melléknevei a görög mitológiában.

találkozástól óva intő *arisztotelészi tiltást* megfogalmazhatjuk, mint fizikai elvet:

Kozmikus cenzor hipotézisek. *A fizikai világ térideje olyan, hogy az egyetlen ősrobbanás-típusú szingularitáson kívül csak eseményhorizontok mögé rejtett, tehát fekete lyuk-típusú, szingularitásokat tartalmaz.*

Érdekes, hogy az általános relativitás-elméletnek vannak olyan fizikailag releváns és stabil téridő-megoldásai, amelyek a kozmikus cenzor hipotézis ún. erős változatát megsértik és hogy ilyen megoldások pontosan négy téridő dimenzióban léteznek (*Etesi*).

A fizikatörténet jelenlegi szakaszában a fizikai világ két szélét: a nagyon kicsi és a nagyon nagy dolgokat két, egymásnak homlokegyenest ellentmondó de külön-külön jól működő elmélet írja le. Előbbit a kvantummező-elmélet, utóbbit az általános relativitás-elmélet. Ez egy igen ellentmondásos és feszült helyzet, ami tisztázást kíván. A fizikusok kísérleti tapasztalatok híján úgy *gondolják*, hogy a tér és idő nagyon kis tartományai, az $\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35}$ m *Planck-távolság* és a $t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 10^{-44}$ sec *Planck-idő* (ahol a már említett állandókon túl G a Newton-féle gravitációs állandó) felé közeledve mind a mai kvantummező-elméletek, mind az általános relativitás-elmélet érvényüket vesztik és átadják helyüket egy egységes elméletnek, mely mind a kvantum- mind a gravitációs jelenségeket leírja. Ez a máig egyelőre teljességgel hipotetikus *kvantumgravitáció-elmélet*. A kvantumgravitáció elmélete olyan szélsőséges fizikai szituációkba engedne bepillantást, hogy pl. hogyan néznek ki egy elpárolgó fekete lyuk utolsó másodpercei, vagy mi történt az ősrobbanás utáni első 10^{-44} másodperc során. Nem meglepő tehát, hogy ennek az elméletnek mind a fogalmi (szemantikai), mind a matematikai (szintaktikai) szerkezete egyelőre teljesen ismeretlen, de abban szinte mégis mindenki egyetért, hogy a téridőt nem az aritmetikai kontinuummal kell benne leírni. Sőt, a kvantumgravitáció bizonyos naiv megfogalmazásai arra utalnak, hogy majd Ω-típusú nem-kiszámítható számok fölbukkanásával is számolni kell (*Geroch–Hartle*).

4. Az aritmetikai kontinuum szerkezetének pszichológiai vonatkozásai

Richard Dedekind tehát elhatározta, hogy egyszer s mindenkorra megadja „a folytonosság lényegének valódi definícióját”. Neki köszönhetjük az aritmetikai kontinuum, a valós számok halmazának modern, preciz fogalmát. A valós számok halmaza természetesen a valós számok összességéből áll és ezek nem mások, mint a racionális számok aktuálisan végtelen részhalmazai. Ha ezt elfogadjuk és az aritmetikai kontinuumot a fizikai kontinuum modelljének tekintjük, akkor a fizikai tér is pontokból áll és ezek „állnak össze” kontinuummá. Ez az elképzelés viszont a mai fizikában problémákat vet fel azért, mert e pontokból mint aktuálisan végtelen halmazokból a végtelenek előhívhatók. Tehát meg kell vizsgálnunk, hogy az „elkülönült pontokból álló folytonosság” fizikai szempontból igencsak problematikus elképzelése mennyiben objektív—vagyis a fizikai világ egy lényeges tulajdonságát megragadó—és mennyire szubjektív—vagyis bizonyos pszichés tartalmak, mechanizmusok tudattalan késztetésének, kivetülésének tekinthető—eredetű fogalom.

Descartes írja le először modern fogalmakkal az idegrendszer és az agy működését. Minden, a külvilágból, ill. a szervezetből érkező inger idegpályákon keresztül először az agyba jut. Itt történik meg a beérkezett információ szűrése, feldolgozása, szerkesztése; de ami így keletkezik még nem alkotja magát a tudatot, hanem mindez összegyűlve a tobozmirigyen (*glandula pinealis, corpus pineale*) keresztül kilép egy nem-materiális, szellemi természetű világba, ahol is a „szellem a gépben”: az *én* várakozik és előtte mint tanú előtt az egész „összeáll”. A beérkezett információk alapján az *én* tudatos döntéseket hoz és ezek fordított útvonalon—a tobozmirigyen és az idegpályákon keresztül—cselekedeteinkké lesznek. E jólismert elképzelés a *cartesiánus színház*. Attól függetlenül, hogy az öntudat szellemi természetét elfogadja vagy sem, ma már senki sem gondolja komolyan a tobozmirigy ilyenféle központi átjárói szerepét. Sok pszichológiai tapasztalat, filozófiai elméleti gondolatmenet mutatja ki egységesen, hogy a fizikai térben és időben nincs egy lokalizált pont, egy pillanat, vagyis egy esemény amiben a „dolgok összeállnak”; hanem az öntudatért és annak fönntartásáért—legalábbis mint fiziológiai jelenségért—valahogyan a *teljes agyszerkezet* felelős. De hogy hogyan, az ma még egyáltalán nem világos.[21] Mindenesetre a valahogyan nyilvánvalóan meglévő egyetlen megfigyelő központi szerepe magyarázatot ad arra, hogy tudatosságunkat miért kíséri az osztatlan egységesség érzése. *William James* hangsúlyozza először tudatosságunk másik legfontosabb jellemzőjét, annak *folytonos* természetét: tudatosult külső-belső érzékszervi tapasztalataink, valamint belső mentális tevékenységünk tudatosult eredményei, gondolataink-érzéseink, egyenként és egymás után megszakítás nélküli *folytonos eseménysorként* peregnek a szubjektív én mint tanú előtt. Ez a *tudat folyama (stream of consciousness)*. A „kinti” fizikai világban a folytonosság alapját adó aktuálisan végtelen entitásokkal szemben elbizonytalanító tapasztalatokat szereztünk; lehetséges, hogy a tudat folyama az egyetlen forrása a természetben mégiscsak látni vélt és azután matematikailag formalizált folytonosságnak és az ennek alapját adó meghatározó érzésünknek, a *végtelennek*? Ha a tudat folyama mint objektív eseménysor valóban létezik, akkor a folytonosság, ill. ami sokkal fontosabb: a végtelen, bár kissé megszorítottabb de még ontológiai státusszal bír.

Egyre több pszicho-fiziológiai megfigyelés, kísérleti tapasztalat mutatja ki azonban megkérdőjelezhetetlenül, hogy tudatunk a fizikai időben nem folytonos. Vegyük ezeket közelebbről szemügyre. A tudat folyama tehát két dologból: külső (beleértve most a saját testünket is) érzékletek tudatosulásából, ill. belső mentális tevékenységünk tudatosult produktumaiból tevődik össze. Tekintsük először az érzékelést. Számtalan, minden érzékszervünk esetében kimutatható érzékszervi csalódások elemzése vezetett arra, hogy érzékelésünk a fizikai időben nem folytonos.[22] A XX. sz. egyik legmeghatározóbb—és legmegosztóbb—neurológusa volt az amerikai *Benjamin Libet*, aki az 1960-70-es években úttörő pszicho-fiziológiai kísérletek seregét hajtotta végre. E kísérletek legmeglepőbb tanulsága az, hogy a külvilág eseményei által kiváltott, agyunkban nagy sebességgel zajló válasz-folyamatoknak csak kis hányada válik tudatossá és ezek tudatosulási folyamata is meglehetősen lassú: általában 500 msec időt vesz igénybe. Tudatosságunk meglehetősen nehézkesen „kapcsol be”. Ennek eredményeképpen ugyan mindig az érzékelt jelenben, de már kb. fél másodperccel a fizikai múltban élünk. Annak a magyarázata, hogy ennek az igen jelentős és állandó késésnek nem vagyunk tudatában *Libet* szerint az, hogy agyunk az eseményeket tudatossá válásuk idejéhez képest kb. $0{,}5$ másodperccel mindig „visszadátumozza” a múltba (ehhez az agy az érzéklet által a beérkezése pillanatában kiváltott ún. elsődleges jelet, *evoked potential, EP*, használja referenciaként). E *félmásodperces paradigma* segítségével sok érzékelési paradoxon feloldható. Most említsük meg az egyik legérdekesebbet, a *color phi* jelenséget: ha egy rövid időre vörös, majd röviddel utána tőle kis térbeli távolságban rövid időre egy zöld fényforrást villantunk föl, akkor ezt úgy érzékeljük, hogy a fényforrás *folyamatos* mozgás közben *folyamatos* színváltoztatással elmozdult a (vörös) kezdőpontból a (zöld) végpontba. Ha látásunk az érzékletek folyamatos tudatosítása lenne, akkor meg kellene magyaráznunk, hogy agyunk miért kezdi el átalakítani a pont színét vörösről zöldre és miért kezdi el a vöröstől a zöld fényforrás felé mozgatni a pontot *már azelőtt*, hogy a zöld fény kigyulladt volna? Ez és náhány más paradoxon feloldását teszi lehetővé egy friss elképzelés, az ún. kétlépcsős modell (*Herzog–Kammer–Scharnowski*), amely szerint az érzékletek (1) először kvázi-folytonos, tudattalan feldolgozását (2) kb.

[21] L. pl. *D. Dennett* meggyőző erővel még nem igazán rendelkező elképzelését, a *multiple drafts* modellt, ami szerint az agy különböző területein, egymástól teljesen függetlenül tevékenykedő különféle ágensek együttes működése váltja ki a tudatosságot.

[22] Igazából annak fölvetése, hogy érzékelésünk nem folytonos, nem új: már az indiai *abbidharma buddhista iskola* 2300 éves elképzelései szerint is az érzékelés diszkrét tudatos momentumok összességéből áll.

400-500 msec időközönként egy összegzett, szerkesztett tudatosult kép megszületése követi, megfelelő visszadátumozással.

Térjünk rá belső mentális tevékenységünk folyamatosságának problémájára. Itt természetesen sokkal nehezebb tudományos szempontból elfogadható kísérleteket elvégezni a szubjektív tényező nagyobb jelenléte miatt. Emiatt is ilyen kísérletek, ha vannak, nem perdöntő erejűek. Semmiképpen sem szeretnénk ebben a nehéz vitában elmélyedni, ezért itt most csak *Libet* talán legnagyobb visszhangot kiváltó 1977-es kísérletét fogjuk megemlíteni, miben az egyszerű mozdulatokért felelős belső intencionalitás kialakulását vizsgálta. A kísérleti elrendezés rendkívül egyszerű. A kísérleti alany fejére, egészen pontosan a szenzori-motorikus kéreg megfelelő pontja fölé, egy EEG (elektroenkefalográf), a terület által mozgatott (pl. jobb) mutató-ujjra pedig egy EMG (elektromiográf) érzékelőt helyeztek el. Az EEG elektródával az agyban az ujj-behajlításhoz szükséges készenléti potenciál (*readiness potential, RP*), míg az EMG-vel az ujj behajlítását elvégző tényleges izom-potenciál pontos kialakulását tudták nyomon követni. A fentebbi műszerekkel összekötve és a kísérleti résztvevő szeme előtt számlapon egy óramutató haladt körbe, mely mind a műszerek, mind a kísérleti alany számára egy egységes, szinkronizált fizikai referencia-időt szolgáltatott. *Libet* azt kérte pácienseitől, hogy az óramutatót figyelve *egy általuk teljesen szabadon választott, nem előre elhatározott pillanatban* hajlítsák be mutató-ujjukat és a döntés szubjektíve érzett „első felbukkanásának pillanatához” tartozó óramutató-helyzetet utólag (tehát a behajlítás után jóval) közöljék. Az EEG-jelekkel egybevetve az EMG-jelek természetesen később alakultak ki, viszont az is kiderült, hogy a szubjektív tudósításban szereplő időpillanat is átlagosan kb. 500 msec-mal későbbi, mint az EEG-jel kialakulásának kezdete! Felvetődik hát a kérdés: végül is, „ki” vagy „mi” kezdeményezte az ujj behajlítását? E nehéz kérdés nem képezi mostani vizsgálódásunk tárgyát, ezért inkább azzal zárjuk a kísérlet vázlatos ismertetését, hogy tehát a „szabad akarati” döntés kezdete egyáltalán nem tudatos és ennélfogva ennek a megelőző időintervallumnak a kísérleti alany nem is volt tudatában. Mindezt megpróbálhatjuk annak bizonyítékaként tekinteni, hogy belső mentális tevékenységünk is—legalábbis részben—nem folyamatosan tudatosítható. De az is teljesen világos, hogy egy megtámadhatatlan konklúziótól még igen távol állunk.

De mi mindebből mégis azt a következtetést vonjuk most le, hogy a tudat folyama sokkal inkább egy belső szubjektív érzés semmint egy fizikai időben folyamatosan zajló, folyamatosan tudatosuló eseménysor szemtanú-szerű követése. Ha ez így van, akkor honnan származik a folytonosság erős érzése? Hát onnan, hogy itt most *megfigyelő és megfigyelt ugyanaz.* Nem tudjuk szubjektíven megállapítani azt, amikor tudatunk „bekapcsol” vagy „kikapcsol”, mert ehhez ezen legelső ill. legutolsó tudatos pillanatok előtt ill. után is már ill. még tudatosnak kellene lennünk, ami logikai ellentmondás. De mintha itt még lenne egy kibúvó. Modern pszicho-fiziológiai, neurológiai kutatások kimutatták, hogy agyunk eseményekkel kapcsolatos igen absztrakt információkat (esemény ideje, helye, színe, stb.) az eseményre vonatkozó bonyolult elektromos mintázatok alakjában tárol el későbbi feldolgozáshoz-szerkesztéshez. Pl. egy esemény relatív időpontját a beérkező idegi impulzus kiváltotta éles, Dirac-delta-szerű EP elsődleges jel alakjának „elolvadása” adja, stb. Tehát akkor elvben elképzelhető lenne, hogy agyunk egy tudatos eseménysor utolsó eseményét is megjelölné egy „utolsó pillanat vagyok” elektromos címkével, lehetővé téve ennek tudatosítását (egy későbbi időpontban). De a tény, hogy ez nem így van arra utal, hogy a „tudatosnak lenni” egy bizonyára sokkal összetettebb tulajdonság lehet mint az időbeliség, szín, hangmagasság stb.; ez nem is lenne meglepő, hiszen már fentebb is említettük, hogy a tudati aktusok térben-időben nem lokalizálhatók, tehát nem tekinthetők fizikai eseményeknek a szokványos értelemben.

Összefoglalva: tudatosságunkat annak ellenére folyamatosnak éljük meg, hogy a fizikai időben nem folytonos szakaszokból áll. *Az eddigiek—tehát elméleti fizikai, pszichológiai áttekintéseink—fényében a két fogalom: a végtelen (halmaz) és az arra épülő folytonosság ontológiai helyzete bizonytalanná válik, mert itt most csak saját magunk által megtapasztalt értelmi tevékenységünk egyik* *jellegzetességének—ti. számunkra nem-elkezdődő és nem-befejeződő jellegének—külvilágra történő tudattalan projekcióiként jelennek meg.*[23] E projekció megnyilvánulása lehet egyrészt a számlálás *tetszőleges* folytathatóságának empirikusan alá nem támasztott, de erős szubjektív érzése, mely elvezet a természetes számok megszámlálhatóan végtelen halmazának elképzeléséhez, másrészt a *tetszőleges* térbeli feloszthatóság, vagyis a folytonosság érzése, mely elvezet a természetes számokból fentebb ismertetett módon az aritmetikai kontinuum fogalmához.

5. Egy valóság-modell vázlata

Pontosan mikor és hogyan és miért bukkan föl a természetes számok strukturájában a végtelen? Hogyan kapcsolódik a végtelen eszméje és a természetes szám eszméje egymáshoz? Meg lehet-e konstruálni a „természetes számokat” nélküle? E kérdések (ha lehetséges ez egyéltalán) egy még mélyebb problémához vezetnek el, mely modern valóság-élményünk és a klasszikus filozófia metafizikai univerzuma közti éles ellentétből fakad.

Választ keresve elsőként elevenítsük föl a természetes számok szokásos konstrukcióját, melyet a fentebbi matematikai részben átugrottunk. Ha X egy tetszőleges (akár nagyon sok $x \in X$ elemből álló) halmaz, akkor jelölje $\{X\}$ azt az *egyelemű* halmazt, melynek egyetlen eleme az X halmaz. Egy érdekes önmagára referáló operációt vezetünk be: X^+ jelölje az X ún. *rákövetkezőjét* vagyis azt a halmazt, mely áll magából X-ből hozzávéve még az $\{X\}$ egyelemű halmazt; jelölésben $X^+ := X \cup \{X\}$. Ez tehát egy olyan halmaz, melynek X-hez képest pontosan eggyel több eleme van. Semmi okunk kételkedni abban, hogy amennyiben X létező halmaz, akkor X^+ is az de azért tudnunk kell, hogy ez az X halmazhoz képest egy szinttel absztraktabb, kevésbé kézenfekvő, származtatott halmaz. Ezt észben tartva el tudjuk kezdeni a természetes számok előállítását. Jelölje $\emptyset$ az *üreshalmazt* és a nulla eredeti elgondolásának megfelelően $0 := \emptyset$. Ezután $1 := 0^+$, majd $2 := 1^+$, s.í.t. Tehát minden természetes szám

$$\left\{\begin{array}{ccc} 0 & := & \emptyset \\ 1 & := & 0^+ \\ 2 & := & 1^+ \\ & . & \\ & . & \\ & . & \end{array}\right.$$

egy-egy halmaz, melyekre a $0 \subset 1 \subset 2 \subset \dots$ tartalmazás is teljesül. Viszont ebben a formában, tehát pusztán az üreshalmazból kiindulva és a rákövetkezési operációt alkalmazva csak *tetszőlegesen sok, de véges* $0, 1, 2, \dots, n$ számot tudunk előállítani, nem tudunk *végtelen* sokat. Egy M halmazt *monotonnak* nevezünk, ha $\emptyset \in M$ és minden $m \in M$ elemére az m^+ rákövetkezője is M-beli, vagyis $m^+ \in M$. A rákövetkezési eljárásnál tett megjegyzésre hivatkozva észrevesszük, hogy egy monoton halmaz (saját részhalmazaihoz képest is) rendkívül bonyolult szerkezetű; monoton halmazokat semmiféle eljárással előállítani egyszerű halmazokból kiindulva nem tudunk és szintén semmiféle tapasztalat ezek létének elfogadására nem kényszerít. Ennélfogva legalább egy ilyen halmaz létezését a matematika talán legfontosabb (és a fentebbi projekciós mechanizmussal megtámogatott) axiómájával követeljük meg:

Végtelenségi axióma. *Létezik monoton halmaz.*

Megmutatható a *végtelenségi axióma* felhasználásával, hogy létezik pontosan egy legszűkebb monoton halmaz (mely tehát benne van minden más monoton halmazban); ezt a legszűkebb monoton halmazt

[23] Pszichés tartalmak külvilágra történő tudattalan projekciói az *extravertált* emberek jellemzője; a barokk kor Európában egy elég extravertált szellemi-művészeti-politikai-gazdasági stb. korszak volt.

$\mathbb{N}\cup\{0\}$-val jelöljük. Lévén $\mathbb{N}\cup\{0\}$ egyértelmű, elemei a fentebb előállított $0,1,2,\ldots,n$ számok és lévén monoton, minden $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ esetén $n^+\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ is teljesül; tehát $\mathbb{N}\cup\{0\}$ ill. a 0 elhagyásával kapott $\mathbb{N}$ halmaz immár valóban *végtelen sok* elemet tartalmaz. Bevezetünk egy *rendezést*: ha $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ akkor legyen $m\leqq n$ akkor és csak akkor, ha mint halmazok $m\subseteqq n$ (ekkor minden n-re $0\leqq n$ mert $\emptyset\subseteqq n$); és egy *összeadást* induktíven: $m+0:=m$ és ha már $m+n$ megvan akkor $m+n^+:=(m+n)^+$ (ezzel az összeadással a rákövetkező egyszerűen $n^+=n+1$ vagyis a következő természetes szám); valamint egy *szorzást* szintén induktíven: $m\cdot 0:=0$ és ha már $m\cdot n$ megvan akkor $m\cdot n^+:=m\cdot n+m$ teljesüljön. Az így felszerelt $\mathbb{N}\cup\{0\}$ halmazt a 0-*val kiegészített természetes számok halmazának* nevezzük, $\mathbb{N}$-et pedig a *természetes számok halmazának*.

A természetes számok e teljesen elfogadott konstrukciójának fő jellemzője az általa előállított objektumok fokozatos eltávolodása empirikusan verifikálható, tehát egészen biztosan létező entitásoktól. Valóban, a $0=\emptyset$ egyszerű halmazhoz képest pl. a

$$7=6\cup\{6\}=5\cup\{5\}\cup\{5\cup\{5\}\}=4\cup\{4\}\cup\{4\cup\{4\}\}\cup\{4\cup\{4\}\cup\{4\cup\{4\}\}\}=\ldots$$

egészen bonyolult szerkezetű halmaz. Viszont a $7\in\mathbb{N}$ természetes szám legalábbis részben-reprezentálható fizikailag mondjuk 7 darab alma egymás mellé helyezésével és ezek szemlélésével is. A „részben-reprezentálhatóság" itt azt jelenti, hogy a 7 darab alma nyilván nem maga a tiszta 7, hanem annak csak néhány jellemzőjét hordozza (pl. már ez a reprezentáció is lehetővé teszi annak felismerését, hogy a 7 prímszám, de pl. azt nem, hogy a szabályos 7-szög körzővel, vonalzóval nem szerkeszthető); viszont sok más, a „7-ség" szempontjából fölösleges tulajdonsággal is bír (pl., hogy e kupac minden tagja piros, jó illatú, gömbölyű, stb.). Tehát maga a „7-ség" a 7 almából álló kupacnál valahogy egyszerre több és kevesebb is. Hasonló a helyzet az első néhány kisebb természetes szám, még az anyagmennyiséget jellemző Avogadro-féle 6×10^{23} számot is ide értve, fizikai reprezentálhatóságával. Viszont milyen értelemben létezik pl. az $n=10^{6\times10^{23}}$ természetes szám? Ez egy olyan szám, amely tízes számrendszerben hatszázezer-trillió számjegyből áll, kiírva papírra megtöltené a Naprendszert. Azt szeretnénk tisztábban látni, hogy mi egy elem „gondolati megkövetelése" és „létezése" közti különbség? A logika egyik fontos elve az ún.

Azonossági axióma. *Ha két entitás minden tulajdonsága megegyezik, akkor a két entitás azonos (identikus).*

Ezt az axiómát használhatjuk a fentebbi két megjelenési forma megkülönböztetésére is: egy ellentmondások nélkül *elgondolható*, bizonyos kívánt tulajdonságokkal bíró fogalomról akkor mondjuk, hogy *létezik* egy általa leírt dolog, ha be tudjuk látni, hogy e fogalom rendelkezik legalább egy, az általunk megköveteltektől *független* tulajdonsággal is. Az *azonossági axióma* alapján egy ilyen entitás nem lehet azonos csupán annak gondolati megkövetelésével. E kritérium segítségével a $7\in\mathbb{N}$ létezése verifikálhatóbbnak tűnik, mint a $10^{6\times10^{23}}\in\mathbb{N}$ számé.

Próbálkozzunk meg a természetes számok egy verifikálhatóbb előállításával. A 7-es szám példája alapján a „7-ség" részben-reprezentácóját élesíthetjük, ha további, a 7-et részben-reprezentáló dolgokat sorolunk fel: a 7 eszméje valami olyasmi, ami nem csak a 7 darab almában van jelen hanem a Nagygöncöl (Nagy Medve, Ursa Major) csillagkép 7 fényes csillagában és a 7-es rendszámú nitrogén atommagjában is, stb., stb. Tehát valahogyan *a* 7 *az, ami mind e dolgokban közös*. Általában az $n>0$ természetes szám empirikus konstrukcója az alábbi formális eljárás eredménye:

$$n:=\bigcap_{\text{tulajdonságok}}\left(\bigcup_{\substack{n\text{ számú}\\ \text{fizikai dolgok}}}\{\text{egy adott } n \text{ számú fizikai dolog összes tulajdonsága}\}\right)\qquad(4)$$

(nem állítjuk, hogy ebben a „formulában” szokványos matematikai értelemben halmazok szerepelnének; az is nyilvánvaó, hogy ez a „definíció” mindenféle praktikus matematikai szempontból teljesen használhatatlan). A rendezést és a műveleteket ezen „empirikus természetes számok” halmazán szintén fizikai operációkkal adjuk meg értelemszerűen. Ez az eljárás nem ad ki automatikusan tetszőleges nagy természetes számokat (pl. egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy $10^{6\times10^{23}}$ így előáll-e, de ezt a lehetőséget kizárni sem tudjuk) de az sem következik belőle, hogy létezne egy univerzális legnagyobb szám: mivel a *legnagyobb* számokat a *legkisebb* fizikai entitások, elemi részecskék tulajdonságai közt keressük, ez utóbbi lehetőséget talán a *Heisenberg*-féle határozatlansági reláció akadályozza meg. Hogyan viszonyul ez a konstrukció a természetes számok szokásos „tiszta” előállításához? Úgy tűnik, két lehetőség áll előttünk:

(i) ezzel az eljárással sohasem juthatunk el a „vegytiszta természetes szám” fogalmához mert mindig bent marad néhány „koszos” tulajdonság, ami nem jellemző magára a „tiszta n-ség”-re;

(ii) a (4) metszetképzési eljárás elvezet ugyan a „vegytiszta természetes számhoz”, de úgy, hogy egyúttal kikerülünk a természeti-fizikai világból, mert a természeti-fizikai világ „nem zárt a metszetképzésre”, „nem teljes”. Tehát a természetes számokat végül is egyfajta fogalmi világba leszünk kénytelenek beágyazni.

Az (i) lehetőséget az *azonossági axióma* újbóli megidézésével zárjuk ki. A (ii) lehetőség vizsgálata komolyabb előkészületeket kíván.

Mi lehet az oka annak, hogy matematikai (ill. általánosabban fogalmi) konstrukcióinkat oly könnyen engedjük „kifutni” egy empirikus szempontból problematikus gondolkodási tartományba? A kimerítő válasz igénye nélkül úgy véljük, hogy a háttérben egy sajátos szellem- ill. kultúrtörténeti tradíció is áll. Ez a hagyomány a *privatio boni* (a rossz mint a jó hiánya) elvének alakjában meghatározó attraktív erővel állandóan jelen volt-van a keresztény Európa világképében és *Kanton* át egészen *Platónig*, sőt régebbre, nyúlik vissza: létezik egy—a természeti valóságon túl és attól függetlenül ill. azt megelőzően és esztétikai, etikai szempontból pedig a természeti világ fölött álló—szubtilis univerzum, az *a priori ismeretek*, *univerzálék* vagy *ideák* világa. E tradíció megerősít minket abban, hogyha gondolkodásunk a földi, természeti szférától távolodik, az annak jele (lehet), hogy gondolkodásunk egyre „helyesebb” és „igazabb” fogalmakkal operál és egyre inkább az ideák világából merítkezik. *Platón* ideatana hatalmas szellem- és kultúrtörténeti befolyásoló erejének engedünk, amikor empirikus megfigyelési alapokból kiinduló fogalomalkotási láncolatainkat hagyjuk a biztosan létező természeti-fizikai világból kifutni és a platóni ideavilág felé konvergálni—ez utóbbi világot egy platonista annak ellenére létezőnek fogadja el, hogy nem tekinti a természeti-fizikai világ részének. Pontosan miért is tételezzük fel, hogy „tiszta fogalmaink” csak odavalósiak lehetnek, nem reprezentálhatják azokat természeti-fizikai entitások? Nem egyfajta *hübrisz* ez? Mi van akkor, ha a fogalomalkotási lánc szokványos íve csupán kulturális megállapodás, platóni örökség? Följegyzett esetek mutatják, hogy nem csak részben-reprezentációikat, hanem magukat a természetes számokat is néhányan látják—habár a „szellemi-kulturális közvélekedés” képességeiket valamiféle rendellenességnek tekinti, sőt ezeket az embereket legtöbbször a társadalom kiveti magából, amire az utal, hogy ilyen eseteket sokszor orvosi leírásokban találunk.

A kultúrtörténet elfogadott alakja a zseniális indiai matematikus, *Shrinivasa Ramanujan* (ejtsd: Ramanudzsan). De azért ő is „rendszeren kívüli” volt, mert habár *Ramanujan* hozzájárulása a XX. sz-i analitikus számelmélethez megkerülhetetlen, egész pályafutása során, nyugati értelemben vett magasabb iskolázottság híján (elszegényedett brahman-családban született), képtelen volt bármilyen matematikai állítást is bebizonyítani: váratlan, meglepő eredményeihez intuitív sejtések, analógiák, kvázi-logikus lépések különös keverékével jutott el. *Szemjon G. Gingyikin* írja könyvében: „Itt kifejezhetjük sajnálkozásunkat, hogy *Ramanujan* ilyen nehéz körülmények között fejlődött. Normális körülmények között kétség kívül kiváló szakmai felkészültségű matematikussá vált volna, de biztosak lehetünk-e abban, hogy akkor is ennyire egyedülálló lett volna?" Egy anekdota szerint, amikor *Ramanujan* már Angliában dolgozott és kórhába került,[24] munkatársa, *Geoffry Hardy* brit matematikus meglátogatta de útközben esernyőjét egy londoni taxiban felejtette. Amikor *Hardy* azon kezdett siránkozni, hogy hogyan fogja tudni megjegyezni a taxi rendszámát, ami 1729, *Ramanujan* azonnal rávágta: mit nem lehet ezen megjegyezni? hiszen ez az első olyan természetes szám, mely kétféleképpen is előáll két köbszám összegeként: $1729 = 10^3 + 9^3$ ill. $1729 = 12^3 + 1^3$.

Egy sokkal szélsőségesebb történetet mesél el *Oliver Sacks* brit neurológus, pszichiáter. Bevezetőül annyit, hogy a XIX. sz. óta tudjuk: az ember *bal agyféltekéje* rendkívül differenciált struktúrájú és a magasabb szintű kognitív funkciókért felelős agyterületek (leginkább) erre a féltekére koncentrálódnak. A neuro-pszichológia első sikereit (pl. *P. Broca, C. Wernicke*) azzal érte el, hogy pontosan föltérképezte, a bal félteke lokális sérülései mely magasrendű kognitív funkció könnyen kimutatható sérülésével járnak együtt. A bal félteke intenzív kutatásával ellentétben a *jobb agyfélteke* annak kevésbé világos tevékenysége miatt évszázados mellőzésben részesült. *Sacks* így ír: „A jobb agyfélteke mellőzésének egyik legfontosabb oka, hogy míg a bal oldalon könnyű kimutatni a különböző sérülések hatásait, a jobb féltekén ezek már sokkal nehezebben körülhatárolhatók. A jobb féltekéről, legtöbbször lenézően, azt feltételezték, hogy »primitívebb«, mint a bal, amelyet az emberi fejlődés különös csodájának tartottak. Ez a feltételezés bizonyos értelemben igaz is: a bal félteke, mint az emlősök—elsősorban az ember—agyának egészen késői kinövése, valóban fejlettebb és specializáltabb. Másrészről viszont a jobb agyfélteke irányítja a valóságfelismerés alapvető képességét, amely minden élőlény számára elengedhetetlen a túléléshez." A jobb agyfélteke végzi el a valóság, ill. benne az ember létezési módja mélyszerkezetének pszichés leképezését (pl. alapozza meg tér-, idő-, kauzalitás-, külvilág-, belvilág-élményünket és még ki tudja mit), vagyis alapozza meg a világgal és benne saját létezésünkkel kapcsolatos (valószínűleg nagyrészt még mélyen tudattalan) élményeinket. Ha ez így van, akkor nem meglepő, hogy a jobb agyfélteke sérülései, degeneratív betegségei rendkívül szokatlan, nehezen értelmezhető tünetegyütteseket produkálnak.

Sacks egy 26 éves autista egypetéjű ikerpár, *John* és *Michael*, történetét meséli el. Mindketten ugyanazzal a súlyos jobboldali agyszövet-károsodással születtek és szokásos értelemben vett gyengeelméjűségük miatt elmegyógyintézetben töltötték életük jelentős részét. De mint *idiots savants* (zseniális hülyék) figyelemreméltó képességekkel rendelkeztek, melyek mind valamiféle rendkívül különös vizuális képességből eredtek: életük történéseire dokumentumfilszerű pontossággal emlékeztek; öröknaptárként bármely (múlt- vagy jövőbeli) dátumról azonnal egyszerre mondták meg, hogy a hét mely napjára esik. És ami itt most a legfontosabb: számunkra felfoghatatlan vizuális kapcsolatban voltak a természetes számokkal és azok tulajdonságaival is. Pl. egyszer *Sacks* jelenlétükben véletlenül kiborított egy doboz gyufát, mire mindketten azonnal rávágták, hogy 111, majd kisvártatva, hogy ez $3 \cdot 37$ (a 111 prímtényezős felbontása). A kérdésre, hogyan tudták ennyire gyorsan és pontosan megszámolni a gyufaszálakat, azt válaszolták, hogy nem kellett megszámolni, mert magát a „111-séget" látták. Egy másik alkalommal *Sacks* arra figyelt föl, hogy egy csöndes sarokban üldögélve az ikrek valahová elrévedve hatjegyű számokat mondogatnak egymásnak, melyek kimondása-meghallása látható jóleső érzésekkel töltötte el őket. Mint egy prímszám-táblázat segítségével *Sacks* kiderítette, ezek mindig prímszámok voltak; táblázatával *Sacks* is beszállt a játékba és az ikrek gyorsan bemelegedve egy óra elteltével már huszonötjegyű számokat csereberéltek egymással,

[24] A szigorú vallási előírásokat betartó vegetariánus *Ramanujan* nem jól viselte a brit szigetek éghajlatát így visszatért Indiába de 1920. április 26-án, mindössze 33 évesen meghalt. Éveinek számát egyébként ő maga jövendölte meg, saját horoszkópjának felállításával.

melyekről *Sacks* túl kicsi táblázatával és gyors személyi számítógép híján (1966-ban) már csak sejtette, hogy prímszámok lehetnek. Mind az eseményeket, mind a dátumokat, mind a számokat valahogyan állandóan látták. *Sacks* így ír: „ők nem fejszámolók, az ő számolóképességük »ikonszerű«. Furcsa számjeleneteket idéznek fel, és hosszan elidőznek bennük; szabadon kóborolnak a számok határtalan tájain; a drámaíróhoz hasonlóan számok egész világát teremtik meg. Azt hiszem, a lehető legfurcsábban működik a képzeletük—egyik legkülönösebb furcsasága pedig az, hogy számokat tudnak elképzelni. Úgy tűnik, ők a számokkal nem az ikonszerűséget mindenestől nélkülöző »műveleteket végeznek«, akár egy számológép, hanem »látják«a számokat, méghozzá egyetlen hatalmas természeti kép közvetlenségével."[25]

Akkor mégis elképzelhető lenne, hogy a számok „itt", a természeti-fizikai világban tanyáznak? És csupán egy immár 2500 éves közös kulturális megállapodással utaltuk őket „oda", az unverzálék különválasztott világába? Az nyilván nem lehet kielégítő magyarázat, hogy a *Ramanujanhoz* vagy az *ikrekhez* hasonló esetek ritkák és elszigeteltek: saját korában *Platón* is ritka és elszigetelt eset lehetett. Akkor pedig mi az oka annak, hogy a természeti-fizikai vs. idea-univerzálé dichotómia létrejött? Az emberi gondolkodással egyidős tapasztalat, hogy a természeti-fizikai világra vonatkozó minden eddigi felismerés—még a legszilárdabbnak hitt vagy a legszebbnek érzett is—végül ideiglenesnek, csupán egy még mélyebben fekvő, még átfogóbb, még nehezebben megragadható igazság közelítő, leegyszerűsített megértésének bizonyult. Egyfajta melankolikus elfogadással vesszük tudomásul, hogy *Kepler* büszke törvényei csak közelítőleg teljesülnek: igazából a Nap körül a bolygók mindenféle egyszerű szépséget, tömör megfogalmazhatóságot nélkülöző bonyolult pályákon keringenek. A görög gondolkodás nagyszerű eszméje, a világ végső, oszthatatlan alapja, az *atom*, először elektronhéjakra és atommagra, majd ez utóbbi protonokra és neutronokra esett szét, végül az egész fogalom elmerült a több száz ismert „elemi részecske" (ún. *rezonanciák*), ill. még általánosabban az absztrakt *kvantumtérelméleti vákuum* mindent átjáró szürke tengerében. A kora-keresztény világkép minden merevsége és fagyossága ellenére is tk. nagyon otthonsan berendezett égboltja, a *mennyei szférák* angyali rendjeikkel tovatűntek és helyüket egy fel nem fogható ürességű és méretű, majdnem abszolút nulla fokos, sötét, egyszóval: idegen *világűr* vette át. A természeti-fizikai világra vonatkozó egyre szaporodó ismereteink egy emberi fogalmakkal, esztétikával egyre nehezebben értelmezhető egyáltalán nem emberi arculatú valóságot tárnak elénk. A természettudományok történetében sosem voltak olyan érthetetlenek és idegenek a természetre vonatkozó legalapvetőbb ismereteink, mint éppen most, amikor ismereteink a legszerteágazóbbak és legrészletesebbek. *Richard Feynman* írja egy helyen, hogy „A fizikai világ működésére vonatkozó ismeretek tömkelege legfeljebb arról győzi meg az embert, hogy az valamiféle értelmetlenséget hordoz magában." *Steven Weinberg* pedig így fogalmaz Az első három perc c. könyve végén: „Minél jobban megértjük az Univerzum történetét, annál értelmetlenebbnek és céltalanabbnak találhatjuk." Egy újfajta valóság kezd itt kibontakozni, melynek—egyelőre, jobb híján—legfőbb jellemzője, hogy nem igazán jellemezhető ismert, éles, érthető fogalmakkal. Ez az új valóság leginkább *semmiszerű*, sehol sem találunk benne egy kikezdhetetlen, végső *valamit*. A fél évezreddel ezelőtt élt francia matematikus, *Charles de Bovelles* egy nagyon különös, mára az elfeledés határán álló könyvet írt a semmiről. Véleménye szerint a semmi nem lehet azonos a nem-létezéssel, hanem a semmi egyfajta mindent átható alaktalan, leírhatatlan módja a létezésnek. *Heideggert* előlegezve ilyeneket ír: „Az anyag mindennek az alapja, de ő maga a semmibe olvad és azon nyugszik." És még „Minden teremtménynek a semmi a gyűjtőmedencéje, ami állandóan jelen van, és amiben azok jelen vannak [...] Tehát minden a semmin alapszik: a teli az üresben van, a lét a nemléten nyugszik."[26] Mintha csak

[25]Végül az ikreket „saját érdekükben" különválasztották, hogy véget vessenek „egymással folytatott egészségtelen kommunikációjuknak", továbbá azért, hogy „megfelelő, társadalmilag elfogadható módon szembesüljenek a világgal és megkezdhessék benne szereplésüket". Ennek hatására különleges képességeik elmúltak.

[26]Nem tudni, hogy *Descartes* ismerte-e *Bovelles* gondolatait. Mindenesetre a nem-bizonyosság problémája őt is

egy modern kvantum-elektrodinamika könyv kvantumtérelméleti vákuumot taglaló fejezetét olvasnánk. Ezzel a semmi-szerűen üres, elmosódott, tompa fényben derengő, elfutó valóság-élménnyel éles ellentétben áll *saját magunk által megfogalmazott*, tehát *per constructionem* érthető és antropomorf fogalmaink időtlen metafizikai univerzuma. Ebben a kristálytiszta hegyi levegőben minden alakzat egy éles fényben csillogó, mozdulatlan, körvonalazott, esztétikailag magasrendű fogalom amely etikai szempontból is erős lábakon áll. Ennek az időtlen univerzumnak a lakói legalábbis *Pitagórász* óta a természetes számok is. Egy meglepő kettősséget látunk: míg gondolkodási-fogalmi láncolataink efelé a mindig is örökérvényűnek és lehető legáltalánosabban igaznak vélt rozsdamentes metafizikai univerzum felé konvergálnak, a valóságra vonatkozó ismereteink egy ettől teljesen eltérő jelleggel rendelkező, elmosódottabb, semmi-szerű, transzcendensebb világ felé sodornak. E sodródás során metafizikai fogalmaink sorra elmaradnak mögöttünk. A természeti-fizikai valóság és a metafizikai univerzum évszázadok múlásával egyre nyilvánvalóbb különválása[27] oda vezetett, hogy a XIX-XX. sz. fordulóján robbanásszerűen megjelenő *semmi* a nyugati keresztény kultúra irracionális valóságtól védő vallási-metafizikai erődítményrendszerét megbontotta és szerteágazó, mélyreható változásokat indított el a vallási életben, filozófiában, matematikában, fizikában, pszichológiában, zenében, irodalomban, képzőművészetekben—az egész nyugati társadalomban.

Egy valóság-modellt vázolunk föl, mely a természeti-fizikai világ és a metafizikai univerzum egyesítésére tett kísérlet. Ez a valóság-modell a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának korábban említett, a *teljességi axióma* következményeként megjelenő transzcendens tulajdonságain alapul. Emlékezzünk (2. szakasz): hogyha a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazához Dedekind-szeletek formájában hozzávesszük az irracionális számokat, vagyis a racionális számok közti „hézagokat”, akkor megkapjuk a valós számok teljes $\mathbb{R}$ halmazát. Ez az $\mathbb{R}$ halmaz „teljes” abban az értelemben, hogy minden megfelelően konvergáló végtelen $\mathbb{Q}$-beli, vagy akár $\mathbb{R}$-beli sorozatnak is van $\mathbb{R}$-ben határértéke ami egyértelmű (ez a *teljességi axióma* korábbiakkal egyenértékű olvasata). A matematikusok azt mondják, hogy a $\mathbb{Q}$ halmazt (konvergencia szempontjából) *teljessé tettük*, ill. *lezártuk* az $\mathbb{R}$ halmazzá történt kibővítésével (megszüntettük a $\mathbb{Q}$-beli „hézagokat” azok hozzávételével); jelölésben:

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \ .$$

Ez a konstrukcó erős analógiaként ekképpen használható. Nevezzük fogalmi-metafizikai vagy röviden *metafizikai univerzumnak* teológiai, filozófiai, természettudományos, racionális fogalom-alkotásaink összességét ($\mathbb{Q}$) és nevezzük *semminek* a valóság ($\mathbb{R}$) fentebbi értelemben vett transzcendens, fogalmakká, metafizikai koncepciókká fel nem osztott „háttér-szövetét” (különféle irracionális számok, „hézagok”). Az ebben az értelemben vett semmi legújabb tapasztalataink alapján létezik. A javasolt valóság-modell most már egyszerűen megfogalmazható: *amennyiben a metafizikai univerzumhoz hozzávesszük a semmit, akkor az előbbit a megfelelően konvergens gondolatmenetek szempontjából le tudjuk zárni, teljessé tudjuk tenni és az így kapott teljesebb univerzumot azonosíthatjuk a valósággal*. Tehát ha

$$\overline{\{\text{metafizikai univerzum}\}} := \text{a metafizikai univerzum semmivel való lezárása}$$

akkor

$$\overline{\{\text{metafizikai univerzum}\}} = \{\text{valóság}\} \ .$$

Erről a modellről a következőket állapíthatjuk meg:

foglalkoztatta és ellene, habár a tobozmirigyen túl rejtőző de mégis egészen biztosan létező „én” elképzelésének vastag falai között találta meg a biztonságot. Viszont már fentebb is említettük, hogy a modern pszicho-fiziológia szerint egyelőre az „én” sem található sehol.

[27] A görög mitológia elmeséli, amikor az istenek és az emberek még utoljára összegyűltek *Mekóné* („mákföld”) mellett és megegyeztek, hogy az istenek a földről végleg elköltöznek.

(i) A valóság részhalmazként tartalmazza a metafizikai univerzumot, ennélfogva ez utóbbi létét semmilyen formában nem vontuk kétségbe (tehát ez nem egy materialista-empirikus valóság-modell);

(ii) A valóság részhalmazként tartalmazza a metafizikai univerzumot, ennélfogva az előbbi meghaladja azt, transzcendensebb (tehát ez nem egy idealista-metafizikai valóság-modell);

(iii) E két észrevételt úgy foglalhatjuk össze, hogy *a fizikán túl helyezkedik el a metafizika és a metafizikán túl helyezkedik el a fizika*;

(iv) A valóság-modell teljességi tulajdonsága azt eredményezi, hogy minden megfelelően konvergens gondolkodási lánc eredménye egy olyan fogalom, mely a valóság része.

Ebben a modellben a *jelenségek*, az *ismert fogalmak*, ill. a *semmi* analogikusan megfelelnek rendre az $\mathbb{R}$ *zárt intervallumainak*, a *racionális* (vagy esetleg a *kiszámítható*) *számoknak*, ill. az *irracionális* (vagy esetleg a *nem-kiszámítható*) *számoknak*. Az, hogy egy jelenség (arisztotelészi értelemben) *részesül* valamilyen tulajdonságban (pl. az alma piros) analogikusan megfelel annak, hogy az $\mathbb{R}$ egy zárt intervalluma *tartalmaz* egy bizonyos elemet. A (iv) tulajdonság analogikusan megfelel annak, hogy egymásba ágyazott zárt intervallumok sorozatának metszete nem üres (a *teljességi axióma* korábbiakkal egyenértékű olvasata). Speciálisan tehát pl. a (4) metszési eljárás nem vezet ki a valóságból és a természetes számok a fizikai valóság részei, nem pedig pusztán gondolati konstrukciók. Ez egy egyszerű konstrukció, mert végeredményét, a *természetes számot*, már régóta ismerjük (analógiával: a megfelelő $\mathbb{R}$-beli konvergens sorozat határértéke $\mathbb{Q}$-beli racionális szám); viszont léteznek olyan bonyolultságú gondolkodási láncok is (modern fizika), melyek konvergenciája ebben a pillanatban még nem nyilvánvaló és ha lesz is végeredménye, az egy semmi-szerű fogalom lesz (vagyis a megfelelő konvergens sorozat határértéke egy nem $\mathbb{Q}$-beli, nagyon generikus valós szám lesz, mint pl. a 2. részben mutatott $\Omega \in \mathbb{R}$ szám, melynek véges, zárt jellemzése nehéz). Azt is érdemes megemlíteni, hogy a valós számok halmazának 2. szakasz végén említett *idő-szerű* tulajdonsága itt úgy jelenik meg, hogy a valóság teljes ismerete mindig is a jövőnkben helyezkedik el.

Köszönetnyilvánítás. Ez a dolgozat a *Peter Fekete*vel folytatott hosszú beszélgetések nélkül nem jött volna létre. Szintén köszönetemet fejezem ki *Domokos Gábor*nak, a *gömböc* egyik felfedezőjének, hogy felhívta figyelmem akadémiai székfoglaló előadásának írott változatára.

Felhasznált irodalom

Baez, J.C.: *Struggles with the continuum*, kézirat, 41 oldal, arXiv: `1609.01421 [math-ph]` (2016);

Bovelles, C. de : *De nihilo* (1510); *Le livre du néant* (trad. P. Magnard), Vrin, Paris (1983);

Dennett, D.C.: *Consciousness explained*, Penguin books (1993);

Domokos G.: *Modellek a diszkrét és folytonos között avagy dialógus a kontinuumról*, MTA székfoglaló előadás (2004);

Etesi, G.: *Exotica or the failure of the strong cosmic censorship in four dimensions*, Int. Journ. Geom. Methods Mod. Phys. **12**, 1550121-1-1550121-14 (2015), arXiv: `1503.04945 [gr-qc]`; Etesi, G.: *Exotica and the status of the strong cosmic censor conjecture in four dimensions*, Class. Quantum Grav. **34**, No. 24, 245010-1-245010-26 (2017), arXiv: `1707.09180 [gr-qc]`;

Fekete, P.: *Towards a resolution of the problem of the continuum*, kézirat, 72 oldal (2016);

Geroch, R.P., Hartle, J.: *Computability and physical theories*, Found. Phys. **16**, 533-550 (1986);

Gingyikin, Sz.G.: *Ramanujan rejtélye*, in: *Történetek fizikusokról és matematikusokról*, Typotex, Budapest (2003);

Hamming, R.W.: *Mathematics on a distant planet*, The American Mathematical Monthly **105**, 640-650 (1998);

Herzog, M.H., Kammer, T., Scharnowski, F.: *Time slices: what is the duration of a percept?*, PLOS Biology, DOI:10.1371/journal.pbio.1002433 (2016);

Libet, B.: *Mind time*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts (2004);

Pauli, W.: *Der Einfluss archetypischer Forstellungen auf die Bildung naturwissenschaftlicher Theorien bei Kepler*, in: *Naturerklärung und Psyche*, Rascher Verlag, Zürich (1952);

Penrose, R.: *A császár új elméje*, Akadémiai, Budapest (1993);

Sacks, O.: *Az ikrek*, in: *A férfi, aki kalapnak nézte a feleségét*, Park kiadó, Budapest (2008);

Schlesinger, K.-G.: *Entropy, heat and Gödel incompleteness*, kézirat, 7 oldal, arXiv: `1404.7433 [hep-th]` (2014);

Weizsäcker, C.F. von: *Klasszikus és kvantumelméleti leírások*, in: *Válogatott tanulmányok*, Gondolat, Budapest (1980).

Budapest, 2016. ősz